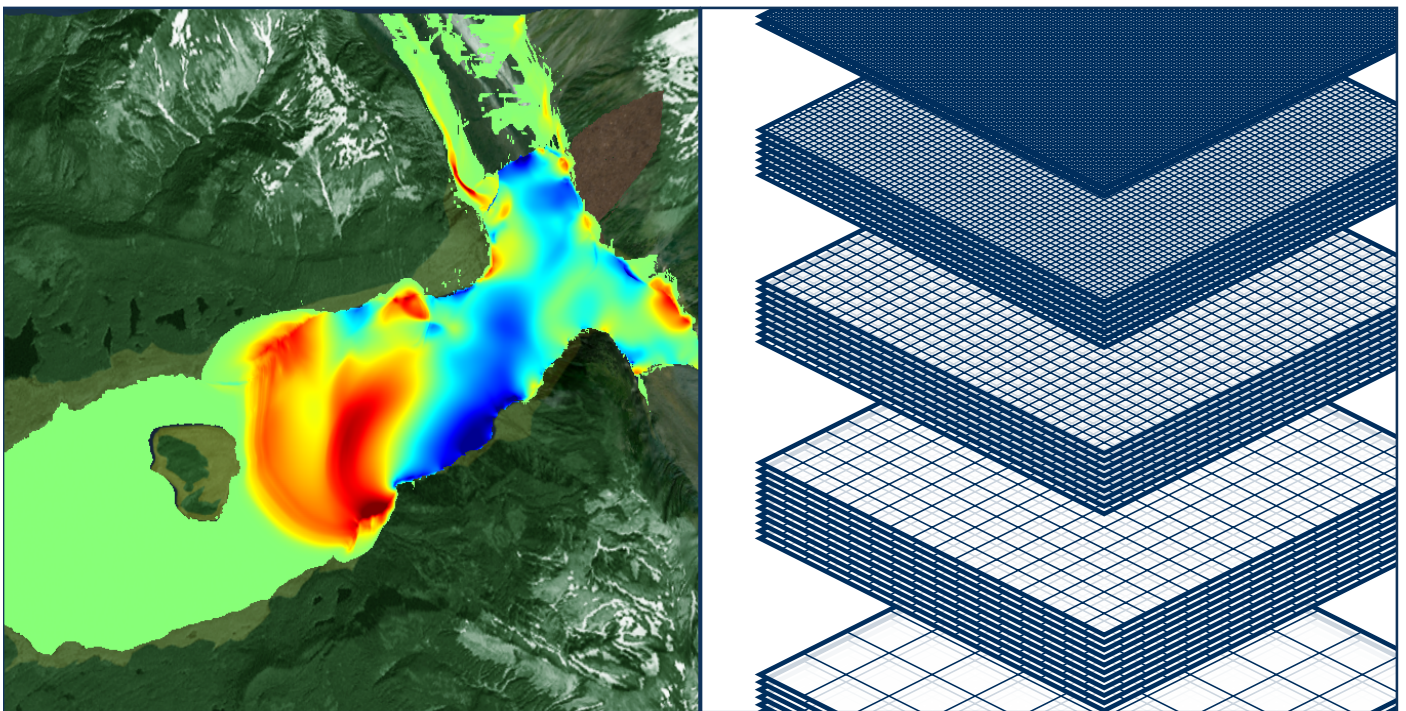


TESIS DOCTORAL

# Cuantificación de la incertidumbre en flujos geofísicos mediante el uso de esquemas de volúmenes finitos Monte Carlo multi-nivel



**CARLOS SÁNCHEZ LINARES**

DIRECTORES:

MANUEL JESÚS CASTRO DÍAZ  
SIDDHARTHA MISHRA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, ESTADÍSTICA  
E INVESTIGACIÓN OPERATIVA Y MATEMÁTICA APLICADA


PROGRAMA DE DOCTORADO EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA 2018



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

AUTOR: Carlos Sánchez Linares

 <http://orcid.org/0000-0002-5493-5982>

EDITA: Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 4.0 Internacional:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode>

Cualquier parte de esta obra se puede reproducir sin autorización  
pero con el reconocimiento y atribución de los autores.

No se puede hacer uso comercial de la obra y no se puede alterar, transformar o hacer obras derivadas.

Esta Tesis Doctoral está depositada en el Repositorio Institucional de la Universidad de Málaga (RIUMA): [riuma.uma.es](http://riuma.uma.es)



# Cuantificación de la incertidumbre en flujos geofísicos mediante el uso de esquemas de volúmenes finitos Monte Carlo multi-nivel



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, ESTADÍSTICA E  
INVESTIGACIÓN OPERATIVA Y MATEMÁTICA APLICADA  
FACULTAD DE CIENCIAS

CARLOS SÁNCHEZ LINARES  
TESIS DOCTORAL





UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

D. Manuel Jesús Castro Díaz, Profesor Titular del Departamento de Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa y Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga, y D. Siddhartha Mishra, Catedrático del departamento de Matemáticas de la Escuela Politécnica Federal, ETH Zurich.

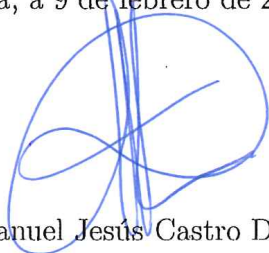
CERTIFICAN:

Que D. Carlos Sánchez Linares, Licenciado en Matemáticas, ha realizado en el Departamento de Análisis Matemático, Estadística e Investigación Operativa y Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga, bajo nuestra dirección, el trabajo de investigación correspondiente a su Tesis Doctoral, titulado:

**Cuantificación de la incertidumbre en flujos geofísicos  
mediante el uso de esquemas de volúmenes finitos  
Monte Carlo multi-nivel**

Revisado el presente trabajo, estimamos que puede ser presentado al Tribunal que ha de juzgarlo. Y para que conste a efectos de lo establecido en el artículo decimotercero del Real Decreto Real 99/2011, autorizamos la presentación de este trabajo en la Universidad de Málaga.

Málaga, a 9 de febrero de 2018



Dr. Manuel Jesús Castro Díaz

Siddhartha Mishra

Dr. Siddhartha Mishra



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

## TESIS DOCTORAL POR COMPENDIO DE PUBLICACIONES

En cumplimiento con los requisitos especificados en el Reglamento de Doctorado de la Universidad de Málaga, la presente Tesis Doctoral ha sido autorizada por los Directores de Tesis y el Órgano Responsable del Programa de Doctorado para ser presentada en el formato de “compendio de publicaciones”.

Las referencias de los artículos en los que el doctorando figura como primer o segundo autor y que avalan la presente Tesis Doctoral se detallan a continuación de acuerdo a su orden cronológico de publicación:

- **Multi-level Monte Carlo finite volume method for shallow water equations with uncertain parameters applied to landslides-generated tsunamis.**

Carlos Sánchez Linares, M. de la Asunción, M.J. Castro, S.Mishra, J. Sukys.  
Applied Mathematical Modelling. Volume 39, Issues 23–24, December 2015,  
DOI: 10.1016/j.apm.2015.03.011. Factor de impacto: 2.291 (13/101 Mathematics Interdisciplinary applications). CiteScore (Scopus): 2.67 (32/402 Applied Mathematics, 17/219 Modelling and Simulation).

- **A HLLC scheme for Ripa model.** Carlos Sánchez Linares, T. Morales de Luna, M.J. Castro. Applied Mathematics and Computation 000 (2015) January 2016.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.05.137>. Factor de impacto:1.345 (54/254.Applied Mathematics). CiteScore (Scopus): 1.88 (66/398 Applied Mathematics, 18/112 Computational Mathematics).

- **Uncertainty quantification in tsunami modeling using multi-level Monte Carlo finite volume method.**

Carlos Sánchez Linares, Marc de la Asunción, Manuel J. Castro Díaz, José M. González-Vida, Jorge Macías and Siddharta Mishra.  
Journal of Mathematics and Industry (08 June 2016). CiteScore (Scopus): 1.15 (148/398 Applied Mathematics).  
DOI: 10.1186/s13362-016-0022-8



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA



A mi padre



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

# Agradecimientos

Quisiera agradecer a todas las personas que han contribuido a que mi etapa de estudiante de doctorado concluyera con la redacción de esta memoria.

En primer lugar, quiero dar las gracias de manera muy especial a los doctores Manuel Castro y Siddhartha Mishra, directores de esta memoria, por su ayuda y dedicación. A Manolo, por su inestimable orientación durante los últimos años, por su paciencia, su confianza y su estímulo para que esta memoria viera por fin la luz. Y a Sid, por su inmejorable acogida y por compartir su tiempo generosamente durante el desarrollo de mi estancia en Zurich.

Gracias a todos los compañeros del Grupo EDANYA, con los que he tenido el placer de trabajar durante los últimos años, formando parte de un ambiente excepcional rodeado de los mejores: Carlos Parés, Jorge Macías, José Manuel González, Tomás Morales, José María Gallardo, Mari Luz Muñoz, Sergio Ortega y Marc de la Asunción. Gracias por la confianza depositada en mí desde el primer día, y por formar parte de los grandes momentos vividos durante esta etapa.

Gracias también a todas las personas que de un modo u otro formaron parte de esta andadura, a Javier Moros y Jorge Serrano, del departamento de Química Analítica de la Universidad de Málaga, y a Jonas Sukys, del departamento de Matemáticas del ETH de Zurich.

A mi familia, por su esfuerzo durante mis años de universidad, másteres y doctorado, por su apoyo y su interés en que hoy consten en esta memoria mi nombre y sus apellidos.

Especialmente agradecido a Myriam, mi mujer, mi compañera durante éste y otros caminos en mi vida, por su paciencia, por sus consejos, por escucharme y soportarme, por estar ahí, siempre incondicional. Y a mi hija, Julia, que nació cuando esta memoria estaba por terminar, gracias por existir.



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

# Índice

Índice de figuras

xiii

Introducción

1

I Marco teórico

9

1 Sistemas hiperbólicos no conservativos. Esquemas camino-conservativos:

aspectos generales 11

1.1 Introducción . . . . . 11

1.2 Soluciones débiles . . . . . 13

1.3 Esquemas numéricos camino-conservativos . . . . . 19

1.3.1 Convergencia y elección de caminos . . . . . 26

1.4 Esquemas bien equilibrados . . . . . 30

1.5 Resolvedores de Riemann aproximados . . . . . 31

1.6 Método de Roe . . . . . 34

1.7 Resolvedores de Riemann tipo PVM . . . . . 38

1.7.1 PVM-(N-1) $U(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  o método de Roe. . . . . 41

1.7.2 PVM-1 $U(S_L, S_R)$  o método HLL . . . . . 42

1.7.3 PVM-2 $U(S_L, S_R, S_{\text{int}})$  o Método IFCP . . . . . 43

1.8 Extensión a alto orden . . . . . 48

2 Cuantificación de la incertidumbre 53

2.1 Modelado probabilístico de la incertidumbre . . . . . 54

2.1.1 Esperanza de un campo aleatorio . . . . . 55

2.1.2 Momentos de orden superior . . . . . 56

2.2 Cuantificación de la incertidumbre . . . . . 57

2.3 Método de volúmenes finitos Monte Carlo . . . . . 57

2.4 Método de volúmenes finitos Monte Carlo Multinivel . . . . . 60

3 Algunos modelos de flujos geofísicos 65

3.1 Ecuaciones de aguas someras para el modelado de tsunamis . . . . . 66

3.2 Modelo bicapa de tipo Savage-Hutter para la simulación de avalanchas y la propagación de tsunamis . . . . . 69

3.3 Modelo de Ripa . . . . . 73

<b>II</b>	<b>Resumen de las contribuciones</b>	<b>75</b>
	Multi-level Monte Carlo finite volume method for shallow water equations with uncertain parameters applied to landslides-generated tsunamis	77
	Uncertainty quantification in tsunami modeling using multi-level Monte Carlo finite volume method	81
	A HLLC scheme for Ripa model	83
	Referencia, resumen y DOI de las publicaciones	85
	<b>Conclusiones</b>	<b>89</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>93</b>

# Índice de figuras

1.1	Esquema volúmenes finitos . . . . .	19
1.2	Representación del resolutor de Riemann simple con ondas . . . . .	33
1.3	Gráficas del polinomio asociado a $PVM-1U(S_L, S_R)$ . . . . .	43
1.4	Situación de los autovalores. $PVM-2U(S_L, S_R, S_{int})$ . Caso (a.1). . . . .	47
1.5	Situación de los autovalores. $PVM-2U(S_L, S_R, S_{int})$ . Caso (a.2). . . . .	47
1.6	Situación de los autovalores. $PVM-2U(S_L, S_R, S_{int})$ . Caso (b.1). . . . .	47
1.7	Situación de los autovalores. $PVM-2U(S_L, S_R, S_{int})$ . Caso (b.2). . . . .	48
2.1	Mallas encajadas del método MLMC. Distribución de muestras. . . . .	63
3.1	Esquema 1 capa. Términos y notación. . . . .	67
3.2	Definición de los ángulos <i>strike</i> , <i>dip</i> y <i>rake</i> para una modelo de rotura de falla. . . . .	68
3.3	Esquema bicapa. Términos y notación. . . . .	71
3.4	Modelo de Ripa 1 capa. Términos y notación. . . . .	73



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA



# Introducción

La historia de la humanidad está salpicada de numerosos episodios catastróficos que han determinado cambios importantes en las ubicaciones de los asentamientos urbanos, así como, migraciones o modificaciones en los usos del territorio. Gran parte de estos episodios tienen su origen en los movimientos sísmicos que suceden en la corteza terrestre y en los procesos que desencadenan. En algunas ocasiones son mayores los desastres originados por los fenómenos que a su vez genera un terremoto que los efectos del propio movimiento sísmico.

Una de las catástrofes más antiguas y mejor documentadas que ilustran este tipo de fenómenos, es la que sucedió en la isla de Thera -actualmente denominada como el archipiélago de Santorini, en el mar Egeo- alrededor del año 1627 a.C. y que dañó muy seriamente la civilización minoica, con importantes consecuencias en la isla de Creta, núcleo cultural de aquella sociedad. El desplome en la caldera de un volcán, generó un colapso del conjunto montañoso de una magnitud ingente. La precipitación secuenciada sobre la superficie del mar de semejante volumen de rocas y piroclastos, produjo una sucesión de tsunamis que impactaron sobre la costa adyacente en el interior de la bahía, causando la práctica destrucción de cuantas infraestructuras existían en el litoral. El tren de olas así generado podría haber alcanzado alturas entre 14 y 18 metros, lo cual supondría que las aguas ascenderían hasta cotas de 50 metros de altura en las zonas acantiladas.

Esta primera referencia de un tsunami tan complejo, nos sitúa en un escenario relacionado con dos posibles fuentes tsunamigénicas: los colapsos o avalanchas de gran cantidad de rocas sobre la superficie del mar, y los terremotos originados en los niveles superiores de la corteza terrestre en regiones marítimas o próximas al mar.

Otros episodios más recientes nos trasladan a Sumatra, Chile y Japón. Quizás el más violento y desolador ha sido el tsunami que originó el terremoto de Honshu (11/3/2011) y que sacudió la costa de Japón cebándose particularmente en torno a la ciudad de Fukushima. El seísmo de mayor magnitud, 9 en la escala de Richter, se produjo a las 05:46 horas en un punto localizado a 177 km de la costa, y a 32 km de profundidad en la corteza

del archipiélago japonés. El tren de olas que generó el movimiento sísmico alcanzó los 14 metros de altura, desplazándose a gran velocidad y cargándose de sedimentos marinos, lo cual incremento considerablemente su capacidad destructiva.

Ante la inexorable ocurrencia de este tipo de fenómenos naturales, ha surgido la imperiosa necesidad del ser humano de adaptarse al medio en el que habita, a veces hostil. Esto le ha obligado a tener que comprender los mecanismos que los genera y así poder mitigar sus efectos devastadores. Es precisamente, en este punto, donde los *modelos matemáticos* juegan un papel determinante y la *simulación numérica* mediante ordenadores se ha convertido en una herramienta de predicción extremadamente potente y, en ocasiones, precisa.

Dado que las fuentes más comunes de tsunamis son los seísmos, éstos han sido investigados exhaustivamente mientras que los tsunamis generados por deslizamientos han sido mucho menos estudiados y el conocimiento existente sobre ellos es más limitado. Se caracterizan por periodos relativamente cortos, en comparación con los generados por un terremoto, ya que no viajan tan lejos. Por lo tanto, una de sus características es que todo su ciclo de vida tiene lugar cerca de la fuente. No obstante, pueden alcanzar altas amplitudes y también pueden volverse extremadamente dañinos. (ver [53, 58]).

La simulación numérica de un tsunami tiene tres etapas: generación, propagación e inundación. En la etapa de generación de tsunamis generados por un terremoto, el modelo de deformación de fallas de Okada (ver [100]) es ampliamente utilizado como el método inicial para predecir el desplazamiento inicial de la superficie del mar en un tsunami. Este método supone que un terremoto puede considerarse como la ruptura de un solo plano de falla. Esta falla se describe mediante una serie de parámetros físicos, que comprenden el ángulo de inmersión, el ángulo de incidencia, el ángulo de inclinación, el ancho de la falla, la longitud de la falla y la profundidad de la falla. El desplazamiento vertical que se calcula con el modelo de Okada se transfiere a la lámina de agua, lo que genera el tsunami. Esta deformación puede aplicarse en un instante de tiempo, que suele ser el inicial, o bien se puede imponer de forma continua especificando el tiempo de ruptura (ver [139]). Recientemente también se están desarrollando modelos más sofisticados en la etapa de generación (ver [67]).

En la etapa de propagación e inundación, se emplean habitualmente dos familias de modelos diferentes: las ecuaciones de tipo Boussinesq que incorporan efectos no hidrostáticos [13, 48] o las ecuaciones no lineales de aguas someras. En este trabajo, utilizaremos el modelo de Okada para el cálculo de la deformación del terreno y generar la onda inicial y las etapas de propagación e inundación se simularán con el modelo de aguas someras no lineales.

El modelado de tsunamis generados por avalanchas presenta una mayor diversidad de modelos. Concretamente el modelado de deslizamientos de tierra, o las avalanchas aéreas y submarinas, es un campo de investigación bastante activo en los últimos años. Aunque se han realizado algunos avances importantes, la descripción teórica y física de estos procesos en un entorno natural es un problema muy difícil y queda mucho por hacer. En la literatura podemos encontrar dos tipos de modelos diferenciados: los modelos gravitacionales para medios granulares con leyes de fricción (como las de Coulomb) y los modelos de fluidos viscoplásticos (ver [3]). Como ejemplos de modelos del primer tipo tenemos el propuesto por Savage y Hutter [121] para la simulación de avalanchas poco profundas de materiales granulares, así como la mejora propuesta en [15]. Son también de este tipo los modelos para la simulación de avalanchas de “depósitos” (*debris flows* en inglés). Estos modelos suelen ser de tipo bifásico, en los que una fase representa el fluido y la otra el material sedimentario. Entre estos destacamos los propuestos por Iverson y Delinger [77], por Pitman y Le [109] y por Fernández-Nieto et al. (véase [50]). Este último es el que usamos en este trabajo ya que permite la reproducción de tsunamis generados por el impacto de un deslizamiento de tierra, la propagación del mismo y la inundación causada.

Es bien sabido que las soluciones de ambos sistemas de ecuaciones en derivadas parciales toman la forma de ondas que se propagan a una velocidad finita. Además, las soluciones pueden formar discontinuidades como choques, resaltos hidráulicos, etc., incluso cuando los datos iniciales son suaves. Por lo tanto, es habitual interpretar las soluciones de tales EDPs no lineales en el sentido de distribuciones. El principal problema que nos encontramos es que los sistemas que vamos a manejar no se pueden expresar en forma conservativa, debido a la presencia de términos fuentes y productos no conservativos. La presencia de productos no conservativos añade serias dificultades tanto desde el punto de vista de la definición del concepto de solución débil como del desarrollo de esquemas numéricos convergentes. Estas dificultades se deben al hecho de que la presencia de discontinuidades impide el uso del marco de la teoría de distribuciones para definir el concepto de solución débil. Como consecuencia, a diferencia de lo que ocurre en el caso conservativo, las condiciones de salto en una solución débil no están unívocamente determinadas. Distintas teorías matemáticas, como la desarrollada por Dal Maso, LeFloch y Murat (véase [44]) permiten dotar de sentido a los productos no conservativos como medidas de Borel y, en consecuencia, definir de forma rigurosa el concepto de solución débil. No obstante, esta definición no es única: depende de la elección de una familia de caminos en el espacio de estados. Aunque desde el punto de vista matemático cualquier elección de caminos da una definición consistente del concepto de solución débil, la elección óptima debe reflejar la naturaleza física del problema. En concreto, los caminos elegidos han de restituir al sistema la información suprimida al despreciar los términos de alto orden como son los de difusión y/o dispersión.

Además, como ocurre en el caso de sistemas hiperbólicos conservativos, es necesario añadir un criterio de entropía para seleccionar sólo aquellas soluciones débiles que tienen sentido físico.

En [103] se propuso una familia genérica de esquemas numéricos de volúmenes finitos, denominados “path-conservative” (camino-conservativos) que son formalmente consistentes con la definición de solución débil asociada a la elección de una familia de caminos y que constituyen una extensión natural de los esquemas conservativos para sistemas de leyes de conservación. Este marco teórico facilita el desarrollo de esquemas numéricos para problemas no conservativos y el análisis de sus propiedades (véase [37] para una actualización de este tipo de esquemas)

Es bien sabido que estos sistemas presentan además una familia notable de soluciones estacionarias que es necesario aproximar de forma muy precisa o incluso de forma exacta. Así, el desarrollo de esquemas numéricos bien equilibrados (“well-balanced”) es de suma importancia en estos problemas. Así, el uso de esquemas *path-conservative* facilita enormemente la construcción de esquemas bien equilibrados (véase [37]). En lo que respecta al desarrollo de esquemas numéricos *path-conservative* en [33, 36] se han presentado una familia de esquemas de volúmenes finitos denotados por “PVM” (*Polynomial Viscosity Matrix*) y “RVM” (*Rational Viscosity Matrix*), cuyas matrices de viscosidad resultan de evaluar funcionalmente una matriz de Roe por un polinomio o una función racional que aproxima a la función valor absoluto. Estos esquemas no necesitan el conocimiento explícito de la estructura espectral de las matrices de Roe, por lo que, en general, son más eficientes que el método de Roe y son más sencillos de utilizar en sistemas en los que no se conocen de forma explícita su estructura espectral como en los sistemas de aguas someras bicapa o en algunos de los sistemas bifásicos anteriormente mencionados. Concretamente una de mis contribuciones ha sido el analizar con detalle la estabilidad lineal de un esquema de esta familia denominado IFCP introducido en ([51]) y que aplicaremos con éxito en la simulación de avalanchas generadas por tsunamis. También he propuesto un esquema de tipo HLLC para el modelo de RIPA (véase [120]). Este sistema aparece de forma natural al estudiar fluidos geofísicos estratificados, concretamente en el modelado de fluidos atmosféricos estratificados por la temperatura. Para ambos esquemas, IFCP y HLLC he propuesto extensiones de alto orden (segundo y tercer orden) y he estudiado sus propiedades de bien equilibrado.

En los últimos años, la implementación eficiente de dichos esquemas se ha llevado a cabo utilizando unidades de procesamiento de gráficos (GPU). Las GPU han demostrado ser un poderoso acelerador para simulaciones científicas intensivas. El alto ancho de banda de memoria y el paralelismo masivo de estas plataformas permiten alcanzar llamativas aceleraciones sobre una CPU estándar en muchas aplicaciones [41, 101] y varios kits de

herramientas de programación e interfaces, como NVIDIA CUDA [99] y Open Computing Language (OpenCL) [80], han demostrado una gran efectividad para la implementación de estos modelos en GPU [41, 49].

En la literatura pueden encontrarse algunos ejemplos de esquemas de volúmenes finitos para sistemas de aguas someras implementados en CUDA (véase [5, 16], [4, 32]). En el caso de la simulación de tsunamis, el uso eficiente de GPUs es necesario si se quieren obtener simulaciones de estos fenómenos en tiempos muy inferiores al tiempo real. Para ello, se utilizan técnicas de descomposición de dominios que se han implementado combinando CUDA y MPI [93] para implementar comunicación interprocesos (véase [1, 138, 135, 6, 78]).

Los métodos numéricos para aproximar estas EDPs hiperbólicas no lineales (o para el caso, cualquier EDP) requieren datos de entradas tales como los datos iniciales, las condiciones de contorno y los coeficientes en los flujos, fuentes y términos de fricción de la EDP. Estos *inputs* deben ser medidos y las mediciones están marcadas por la incertidumbre. Por ejemplo, consideremos el modelado de tsunamis: En tales problemas, las condiciones iniciales se estiman típicamente a partir de un proceso de medición muy incierto: es muy difícil estimar la deformación exacta de la falla o la posición inicial y la velocidad de un deslizamiento de tierra. Esta incertidumbre en la determinación de los *inputs* del sistema se extiende a la solución. El cálculo de la incertidumbre en la solución, dada la incertidumbre de los parámetros de entrada, se recoge en el marco de la cuantificación de la incertidumbre (*Uncertainty Quantification (UQ)*). La UQ para flujos geofísicos es de vital importancia para la evaluación y la mitigación de riesgos.

Aunque existen varios enfoques para modelar la incertidumbre de los inputs, los modelos teóricos más populares introducen la incertidumbre estadísticamente en términos de campos y variables aleatorios. La EDP resultante es una EDP estocástica (aleatoria). La solución debe entenderse en un sentido estocástico y la media, la varianza, los momentos de orden superior, los intervalos de confianza y la función de distribución de probabilidad de la solución son los objetos de mayor interés.

El modelado y simulación de este tipo de sistemas no es nada trivial. Son necesarias un gran número de variables aleatorias para parametrizar la incertidumbre en los *inputs* y constituye un desafío computacional evaluar momentos estadísticos que podrían requerir una gran cantidad de soluciones de las EDPs. Estos desafíos son particularmente acentuados para EDPs hiperbólicas dominadas por convección, ya que las discontinuidades en el espacio físico, como los choques, pueden propagarse al espacio estocástico, lo que resulta en una pérdida de regularidad de la solución subyacente con respecto a los parámetros aleatorios. Se podría necesitar una gran cantidad de grados de libertad en el espacio estocástico para resolver tales funciones con posibles singularidades. Véase una revisión reciente para

obtener una descripción detallada de los desafíos que implica la UQ para problemas hiperbólicos [92].

Recientemente se han desarrollado diferentes métodos numéricos para la cuantificación de la incertidumbre sistemas hiperbólicos. Véase por ejemplo [42, 110, 133, 137, 140] y la revisión [12] para más detalles. Los métodos más populares en la literatura son los métodos de Galerkin que usan bases polinómicas para la aproximación del espacio de probabilidad (gPC), los métodos de colocación y métodos de volúmenes finitos estocásticos (SFVM). Los métodos estocásticos de Galerkin se basan en la aproximación de las variables aleatorias mediante una serie cuyas funciones de base son ortogonales respecto a la distribución de probabilidad subyacente. Los coeficientes de la serie son soluciones de una familia de EDPs que dependen del sistema original. Quizás el mayor inconveniente de este enfoque en el contexto de EDPs hiperbólicas no lineales radica en el hecho de que los sistemas resultantes para estos coeficientes a determinar no son necesariamente hiperbólicos e incluso pueden estar mal planteados. Además, este método es computacionalmente intrusivo, es decir, debemos escribir un código completamente nuevo desde cero para calcular estos coeficientes y los códigos existentes no pueden reutilizarse.

Como alternativa, se proponen otro tipo de métodos donde la idea consiste en tomar una muestra estadística representativa de los parámetros que se consideren, realizar un cálculo determinista para cada uno de los valores de la muestra y, finalmente calcular la esperanza y los momentos de las predicciones obtenidas. Se trata de los llamados Métodos Monte Carlo (MC). Aunque son no intrusivos, y son fáciles de implementar y de paralelizar, los métodos MC tiene un ratio de convergencia asintótica de  $M^{-1/2}$ , siendo  $M$  el número de muestras. Esta tasa de convergencia no es mejorable según el teorema central del límite.

Por lo tanto, los métodos MC requieren un gran número de *ensayos* o muestras para garantizar errores estadísticos bajos. Esta convergencia lenta implica una alto coste computacional para los métodos de tipo MC y los hace inviables a la hora de calcular la incertidumbre en sistemas complejos como los que aquí consideramos. Véase [89] para un detallado estudio del error y un análisis de complejidad computacional para el método MC en el contexto de las leyes de conservación escalar. Esta lenta convergencia ha inspirado el desarrollo de métodos Monte Carlo multi-nivel o MLMC ([59, 60]), en los que se considera una jerarquía de mallas encajadas en el espacio-tiempo para las que se establece el número de ensayos a realizar con cada una de ellas. Este equilibrio sutil del error estocástico con el error espacio-temporal, junto con un nuevo estimador de MLMC para los momentos estadísticos, son los ingredientes clave en la adaptación exitosa de estos métodos a diferentes contextos de UQ. En particular, [89] y [90] extienden y analizan el algoritmo de MLMC para las leyes de conservación escalar y para los sistemas de leyes de conservación, respectivamente. El análisis asintótico para el método MLMC, presentado en

[89], demuestra que el método permite el cálculo de momentos estadísticos aproximados con un costo computacional mucho más bajo que la aproximación MC subyacente. Actualmente, los métodos de MLMC parecen ser uno de los métodos más adecuados para la UQ en el contexto de las EDPs hiperbólicas no lineales. Nuestra principal aportación en este trabajo ha sido la adaptación de este tipo de técnicas para su utilización en fluidos geofísicos y, en concreto, en el uso de MLMC para la cuantificación de la incertidumbre en la propagación de tsunamis generados por terremotos y avalanchas y su implementación en GPUs. De esta forma se ha podido abordar problemas que de otra forma hubieran sido imposibles por su gran esfuerzo computacional. Dado el carácter no intrusivo, la eficiencia y la solidez del método que se propone en esta tesis, se espera que esta contribución conduzca a la aplicación de este paradigma para cuantificar la incertidumbre en una amplia gama de problemas en geofísica.

Esta tesis está estructurada en dos bloques. En el primero de ellos se presenta el marco teórico utilizado para el desarrollo de los esquemas numéricos que hemos diseñado e implementado para los problemas de simulación de tsunamis y el modelo de Ripa de 1 capa. Así hemos presentado en el Capítulo 1 el marco general de los esquemas “path-conservative” y su uso para la discretización de sistemas hiperbólicos no conservativos y su extensión a alto orden. Además hemos prestado especial atención a los esquemas denominados PVM, y, en particular, al esquema IFCP del que hemos demostrado su estabilidad lineal, y a los resolvedores de Riemann simples. A continuación en el Capítulo 2 presentamos los resultados principales que hemos usado para el diseño de esquemas de volúmenes finitos Monte Carlo multi-nivel. Finalizaremos este bloque presentando en el Capítulo 3 los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que hemos usado para la simulación de tsunamis generados por terremotos y avalanchas y el modelo de Ripa, para el que hemos desarrollado un resolvedor de tipo HLLC.

En el segundo bloque de esta memoria se presentan los tres artículos que se han publicado durante el desarrollo de esta tesis doctoral, así como un breve resumen donde destacamos las aportaciones más importantes realizadas en cada uno de ellos.

Finalizamos esta memoria con las conclusiones principales que se pueden extraer de esta tesis y las líneas de trabajo futuro.



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA



# Parte I

## Marco teórico



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

# Capítulo 1

## Sistemas hiperbólicos no conservativos. Esquemas camino-conservativos: aspectos generales

### 1.1. Introducción

En este capítulo introduciremos los aspectos teóricos relacionados con los sistemas hiperbólicos de leyes de conservación con términos fuentes y productos no conservativos. En particular, estos sistemas pueden ser vistos como casos particulares de sistemas hiperbólicos no conservativos. Utilizaremos la teoría introducida por Dal Maso, LeFloch y Murat en [44] para definir el concepto de solución débil de este tipo de sistemas. Presentaremos el concepto de esquema numérico camino-conservativo, introducido por Parés en [103], y abordaremos también el concepto de esquemas bien equilibrados. Todo ello con el objetivo de sentar las bases teóricas que permitan el diseño de esquemas numéricos que aproximen las soluciones de estos sistemas.

Consideremos el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden cuasi-lineal

$$W_t + \mathcal{A}(W)W_x = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.1.1)$$

donde  $W(x, t)$  toma valores en un abierto convexo  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ , y  $W \in \Omega \mapsto \mathcal{A}(W) \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$  es una aplicación regular localmente acotada. Supondremos que el sistema (1.1.1) es estrictamente hiperbólico, es decir, para cada  $W \in \Omega$ ,  $\mathcal{A}(W)$  tiene  $N$  autovalores

reales y distintos  $\lambda_1(W) < \dots < \lambda_N(W)$ , con autovectores asociados  $R_1(W), \dots, R_N(W)$ . Supondremos además que para cada  $i = 1, \dots, N$ , el campo característico  $R_i(W)$  es o bien genuinamente no lineal:

$$\nabla \lambda_i(W) \cdot R_i(W) \neq 0, \quad \forall W \in \Omega,$$

o bien linealmente degenerado:

$$\nabla \lambda_i(W) \cdot R_i(W) = 0, \quad \forall W \in \Omega.$$

Un caso particular de (1.1.1) son los sistemas de la forma

$$w_t + F(w)_x + B(w)w_x = S(w)\sigma_x, \quad (1.1.2)$$

donde la incógnita  $w(x, t)$  toma valores en un abierto convexo de  $\mathcal{O}$  de  $\mathbb{R}^m$ ,  $F$  es una función regular de  $\mathcal{O}$  en  $\mathbb{R}^m$ ,  $B$  es una función matricial de  $\mathcal{O}$  en  $\mathcal{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ ,  $S$  es una función de  $\mathcal{O}$  en  $\mathbb{R}^m$  y  $\sigma(x)$  es una función conocida de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  (en particular, podemos tomar  $\sigma(x) = x$ ). En efecto, si añadimos a (1.1.2) la ecuación

$$\sigma_t = 0, \quad (1.1.3)$$

podemos reescribir el sistema en la forma de (1.1.1):

$$W_t + \mathcal{A}(W)W_x = 0,$$

donde  $W$  es el vector aumentado

$$W = \begin{bmatrix} w \\ \sigma \end{bmatrix} \in \Omega = \mathcal{O} \times \mathbb{R},$$

y  $\mathcal{A}(W)$  es la matriz de orden  $(m+1) \times (m+1)$  cuya estructura por bloques es:

$$\mathcal{A}(W) = \left[ \begin{array}{c|c} A(w) & -S(w) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right],$$

siendo

$$A(w) = J(w) + B(w),$$

donde  $J(w)$  es el Jacobiano de  $F$ :

$$J(w) = \frac{\partial F}{\partial w}(w).$$

Asumimos que la matriz  $A(w)$  tiene  $m$  autovalores reales y distintos

$$\lambda_1(w) < \dots < \lambda_m(w)$$

con autovectores asociados  $r_j(w)$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Si ninguno de estos autovalores es cero, (1.1) es un sistema estrictamente hiperbólico:  $\mathcal{A}(W)$  tiene  $m + 1$  autovalores

$$\lambda_1(w), \dots, \lambda_m(w), 0,$$

con autovectores asociados

$$R_i(W) = \begin{bmatrix} r_i(w) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m; \quad R_{m+1}(W) = \begin{bmatrix} A^{-1}(w)S(w) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Evidentemente, el  $(m + 1)$ -ésimo campo característico es linealmente degenerado y, por simplicidad, asumimos que éste es el único, siendo los otros genuinamente no lineales. Las curvas integrales del campo linealmente degenerado están dadas por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dW}{ds} = R_{m+1}(W). \quad (1.1.4)$$

## 1.2. Soluciones débiles

A fin de introducir la noción de solución débil para sistemas no conservativos, recordemos en primer lugar cómo se define para problemas conservativos:

$$W_t + F(W)_x = 0. \quad (1.2.1)$$

Como es bien sabido, dada una solución débil  $W$  de (1.2.1), el término  $F(W)_x$  debe entenderse como una distribución. Esto no ocurre, sin embargo, para el producto no conservativo  $\mathcal{A}(W)W_x$ : en el caso en que una solución débil  $W$  de (1.1.1) presente discontinuidades no se puede dar sentido a dicho producto como distribución. No obstante, siguiendo la teoría desarrollada por Dal Maso, LeFloch y Murat en [44], es posible dar una definición rigurosa de solución débil para el problema (1.1.1) que generaliza el concepto de solución débil para sistemas de leyes de conservación. Para ello, los productos no conservativos se interpretan como medidas de Borel, cuya definición requiere la elección de una familia de caminos en el espacio de fases.

En el caso particular de una solución débil de (1.2.1) regular a trozos, dado  $t > 0$ , la distribución  $[F(W(\cdot, t))_x]$  se define de la siguiente manera:

$$\langle [F(W(\cdot, t))_x], \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} F(W(x, t))_x \phi(x) dx + \sum_l (F(W_l^+) - F(W_l^-)) \phi(x_l(t)), \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad (1.2.2)$$

donde la derivada que aparece en el término integral de la última expresión debe entenderse en el sentido clásico; el índice  $l$  de la suma corresponde a las discontinuidades existentes en la solución;  $x_l(t)$  es la posición en el instante  $t$  de la  $l$ -ésima discontinuidad;  $W_l^-$  y  $W_l^+$ , los límites de la solución a la izquierda y a la derecha de la  $l$ -ésima discontinuidad en el instante  $t$ ; y finalmente,  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  representa el conjunto de funciones de clase  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  y soporte compacto.

La distribución  $[F(W(\cdot, t))]_x$  puede ser interpretada como una medida de Borel cuya descomposición de Lebesgue es  $\mu_a + \mu_s$ , donde  $\mu_a$  viene dada por:

$$\mu_a(E) = \int_E F(W(x, t))_x dx$$

para cada conjunto de Borel  $E$ , siendo  $F(W(x, t))_x$  la derivada puntual, y

$$\mu_s = \sum_l (F(W_l^+) - F(W_l^-)) \delta_{x=x_l(t)}, \quad (1.2.3)$$

donde  $\delta_{x=a}$  es la medida de Dirac en  $x = a$ .

Dado un conjunto de Borel  $E$ , denotaremos su medida mediante:

$$\int_E F(W(x, t))_x dx = \mu_a(E) + \mu_s(E). \quad (1.2.4)$$

La idea clave para generalizar esta interpretación de soluciones débiles reside en expresar cualquier diferencia de flujos  $F(W_R) - F(W_L)$  en términos de la matriz jacobiana  $\mathcal{J}(W)$  mediante la introducción de un camino arbitrario  $\Phi(\cdot; W_L, W_R) : [0, 1] \mapsto \Omega$  tal que:

$$\Phi(0; W_L, W_R) = W_L; \quad \Phi(1; W_L, W_R) = W_R;$$

de la siguiente manera:

$$F(W_R) - F(W_L) = \int_0^1 \mathcal{J}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds.$$

Esto nos permitirá definir el producto no conservativo  $\mathcal{A}(W)W_x$  para funciones regulares a trozos de nuevo como una medida, cuya parte regular se calcula integrando la función  $\mathcal{A}(W)W_x$  y cuya parte singular resulta de sustituir las diferencias de flujo en (1.2.3) por integrales de línea, como veremos a continuación.

La herramienta básica empleada en la teoría desarrollada en [44] para interpretar los productos no conservativos como medidas es una *familia de caminos*, definida como sigue:

**Definición 1.2.1.** Una familia de caminos en  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  es una aplicación localmente de Lipschitz

$$\Phi: [0, 1] \times \Omega \times \Omega \mapsto \Omega$$

tal que:

- $\Phi(0; W_L, W_R) = W_L$  y  $\Phi(1; W_L, W_R) = W_R$ , para cada  $W_L, W_R \in \Omega$ ;
- para cada conjunto acotado arbitrario  $\mathcal{O} \subset \Omega$ , existe una constante  $k$  tal que

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) \right| \leq k |W_R - W_L|,$$

para cada  $W_L, W_R \in \mathcal{O}$  y cada  $s \in [0, 1]$ ;

- para cada conjunto acotado  $\mathcal{O} \subset \Omega$ , existe una constante  $K$  tal que

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L^1, W_R^1) - \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L^2, W_R^2) \right| \leq K(|W_L^1 - W_L^2| + |W_R^1 - W_R^2|),$$

para cada  $W_L^1, W_R^1, W_L^2, W_R^2 \in \mathcal{O}$  y cada  $s \in [0, 1]$ .

Una vez elegida una familia de caminos  $\Phi$  en  $\Omega$ , el producto no conservativo puede interpretarse como una medida de Borel en  $(L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap BV(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+))^N$ , denotada por  $[\mathcal{A}(W)W_x]_\Phi$ . Dada una solución débil  $W$  de (1.1.1) regular a trozos, la medida de Borel correspondiente al producto no conservativo se define como:

$$\begin{aligned} \int_E \mathcal{A}(W(x, t)) W_x(x, t) dx &= \int_E \mathcal{A}(W(x, t)) W_x(x, t) dx + \\ &\quad \sum_l \left( \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_l^-, W_l^+)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_l^-, W_l^+) ds \right) \delta_{x=x_l(t)}. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

que, obviamente, generaliza a (1.2.4), donde  $E$  es un conjunto de Borel. En la igualdad anterior, la expresión  $W_x$  de la primera integral representa de nuevo la derivada puntual de  $W(\cdot, t)$ ;  $x_l(t)$ , la posición de la  $l$ -ésima discontinuidad de  $W$  en el instante  $t$ ; y  $W_l^-$  y  $W_l^+$ , los límites de  $W$  a la izquierda y a la derecha de la  $l$ -ésima discontinuidad en el instante  $t$ .

Obsérvese que la medida puede descomponerse como una suma  $\mu_a^\Phi + \mu_s^\Phi$  donde:

$$\mu_a^\Phi(E) = \int_E \mathcal{A}(W(x, t)) W_x(x, t) dx,$$

para cada conjunto de Borel  $E$ , entendiendo a la derivada en sentido puntual, y:

$$\mu_s^\Phi = \sum_l \left( \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_l^-, W_l^+)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_l^-, W_l^+) ds \right) \delta_{x=x_l(t)}. \quad (1.2.6)$$

A través de una discontinuidad con velocidad  $\xi$ , una solución débil debe satisfacer la condición de Rankine-Hugoniot generalizada

$$\int_0^1 (\xi \mathcal{I} - \mathcal{A}(\Phi(s; W^-, W^+))) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W^-, W^+) ds = 0, \quad (1.2.7)$$

donde  $\mathcal{I}$  es la matriz identidad y  $W^-$ ,  $W^+$  son los límites a la izquierda y a la derecha de la solución en la discontinuidad. Obsérvese que en el caso particular de un sistema de leyes de conservación, esta condición de Rankine-Hugoniot es independiente de la familia de caminos elegida y se reduce a la condición usual:

$$F(W^+) - F(W^-) = \xi(W^+ - W^-). \quad (1.2.8)$$

Igual que en el caso conservativo, no toda discontinuidad que verifique la condición anterior es admisible. Es necesario, además, adoptar conceptos de solución entrópica, como los siguientes:

**Definición 1.2.2.** *Se dice que una solución débil es una solución entrópica en el sentido de Lax si, en cada discontinuidad, existe  $i \in \{1, \dots, N\}$  tal que*

$$\lambda_i(W^+) < \xi < \lambda_{i+1}(W^+) \quad y \quad \lambda_{i-1}(W^-) < \xi < \lambda_i(W^-)$$

*si el  $i$ -ésimo campo característico es genuinamente no lineal, o*

$$\lambda_i(W^-) = \xi = \lambda_i(W^+)$$

*si el  $i$ -ésimo campo característico es linealmente degenerado.*

**Definición 1.2.3.** *Dado un par de entropía  $(\eta, G)$  para (1.1.1), es decir, un par de funciones regulares de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$  tales que:*

$$\nabla G(W) = \nabla \eta(W) \cdot \mathcal{A}(W), \quad \forall W \in \Omega,$$

*se dice que una solución débil es entrópica si satisface la desigualdad:*

$$\partial_t \eta(W) + \partial_x G(W) \leq 0,$$

*en el sentido de las distribuciones.*

La elección de la familia de caminos es importante puesto que determina la velocidad de propagación de las discontinuidades. La opción más simple consiste en la familia de segmentos, que equivale a la definición de producto no conservativo propuesta por Volpert en [136]. En aplicaciones prácticas, esta elección debería estar basada en consideraciones físicas. No obstante, es natural desde el punto de vista matemático requerir a esta familia que satisfaga algunas hipótesis que relacionan los caminos con las curvas integrales de los campos característicos. Siguiendo [94], supondremos que los caminos verifican las siguientes hipótesis:



- (H1) Dados dos estados  $W_L$  y  $W_R$  pertenecientes a la misma curva integral  $\gamma$  de un campo linealmente degenerado, el camino  $\Phi(s; W_L, W_R)$  es una parametrización del arco de  $\gamma$  que conecta a  $W_L$  y  $W_R$ .
- (H2) Dados dos estados  $W_L$  y  $W_R$  pertenecientes a la misma curva integral  $\gamma$  de un campo genuinamente no lineal,  $R_i$ , con  $\lambda_i(W_L) < \lambda_i(W_R)$ , el camino  $\Phi(s; W_L, W_R)$  es una parametrización del arco de  $\gamma$  que conecta a  $W_L$  y  $W_R$ .
- (H3) Denotemos mediante  $\mathcal{RP} \subset \Omega \times \Omega$  al conjunto de pares  $(W_L, W_R)$  tales que el problema de Riemann:

$$\begin{cases} W_t + \mathcal{A}(W)W_x = 0, \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < 0, \\ W_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (1.2.9)$$

tiene una única solución autosimilar  $W(x, t) = V(x/t; W_L, W_R)$  compuesta por a lo sumo  $N$  ondas simples (esto es, choques, discontinuidades de contacto u ondas de rarefacción) que conectan  $J + 1$  estados intermedios

$$W_0 = W_L; W_1; \dots; W_{J-1}; W_J = W_R;$$

con  $J \leq N$ . Suponemos entonces que, dados dos estados  $(W_L, W_R) \in \mathcal{RP}$ , la curva descrita por el camino  $\Phi(s; W_L, W_R)$  en  $\Omega$  es la unión de las curvas correspondientes a los caminos  $\Phi(s; W_j, W_{j+1})$ ,  $j = 0, \dots, J - 1$ .

Si la definición de soluciones débiles de (1.1.1) está basada en una familia de caminos que satisfaga estas hipótesis, se verifican las siguientes propiedades naturales (ver [94]):

**Proposición 1.2.1.** *Supongamos que el concepto de solución débil de (1.1.1) se define a partir de una familia de caminos que verifica las hipótesis (H1)-(H3). Entonces:*

- (i) *Dados dos estados  $W_L$  y  $W_R$  pertenecientes a la misma curva integral de un campo linealmente degenerado, la discontinuidad de contacto dada por:*

$$W(x, t) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < \sigma t, \\ W_R & \text{si } x > \sigma t, \end{cases}$$

*donde  $\sigma$  es el valor (constante) del correspondiente autovalor a lo largo de la curva integral, es una solución débil de (1.1.1).*

(ii) Sea  $(W_L, W_R)$  un par de estados pertenecientes a  $\mathcal{RP}$  y  $W$ , la solución del correspondiente Problema de Riemann (1.2.9). Se tiene la siguiente igualdad:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(W(x, t)) W_x(x, t) dx = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds.$$

Consecuentemente, la masa total de la medida de Borel  $[\mathcal{A}(W(\cdot, t)) W_x(\cdot, t)]_{\Phi}$  no depende de  $t$ .

(iii) Sea  $(W_L, W_R)$  un par de estados pertenecientes a  $\mathcal{RP}$  y sea  $W_j$  cualquiera de los estados intermedios que aparecen en la solución del problema de Riemann (1.2.9). Entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds = \\ \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_j)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_j) ds \\ + \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_j, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_j, W_R) ds. \end{aligned}$$

En [94] se dan algunas orientaciones para construir una familia de caminos satisfaciendo estas hipótesis (al menos para pares  $(W_L, W_R) \in \mathcal{RP}$ ).

La siguiente proposición presenta una propiedad de la solución de un problema de Riemann que tendrá un destacado papel a la hora de definir resolvedores de Riemann aproximados para (1.1.1) (véase [103]):

**Proposición 1.2.2.** Dado  $(W_L, W_R) \in \mathcal{RP}$ , la solución  $W(x, t) = V(x/t; W_L, W_R)$  del problema de Riemann (1.2.9) satisface la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds \\ + \int_0^\infty (V(v; W_L, W_R) - W_R) dv + \int_{-\infty}^0 (V(v; W_L, W_R) - W_L) dv = 0. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

**Observación 1.2.1.** Si se establece el concepto de solución entrópica a partir de un par de entropía  $(\eta, G)$ , siendo  $\eta$  convexa, se tiene la siguiente desigualdad para la solución de un problema de Riemann:

$$\begin{aligned} G(W_R) + \int_0^\infty (\eta(V(v; W_L, W_R)) - \eta(W_R)) dv \\ \leq G(W_L) - \int_{-\infty}^0 (\eta(V(v; W_L, W_R)) - \eta(W_L)) dv. \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

La prueba es análoga a la correspondiente a un sistema de leyes de conservación.

### 1.3. Esquemas numéricos camino-conservativos

El eje central de la teoría en la que se apoya esta memoria para la resolución numérica de sistemas hiperbólicos no conservativos es el concepto de esquema numérico *camino-conservativo* introducido por Parés en [103]. Este concepto generaliza el de esquema conservativo para sistemas de leyes de conservación, como veremos a continuación.

Una solución débil de (1.2.1) satisface la igualdad:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_1) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_0) dx + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} F(W(a, t)) dt - \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} F(W(b, t)) dt \right), \quad (1.3.1)$$

para cada rectángulo  $[a, b] \times [t_0, t_1]$  en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ , siendo  $\Delta x = b - a$  y  $\Delta t = t_1 - t_0$ .

Como es bien sabido, los esquemas conservativos se basan en la igualdad anterior. A la hora de discretizar el sistema, consideramos celdas computacionales  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , (véase Figura 1.1), cuyo tamaño  $\Delta x$  se supone constante por simplicidad. Supongamos también que  $x_{i+1/2} = i\Delta x$  y denotemos por  $x_i = (i - 1/2)\Delta x$  el centro de la celda  $I_i$ . Sea  $\Delta t$  el paso de tiempo, considerado también constante, y definimos  $t_n = n\Delta t$ . Denotemos por  $W_i^n$  la aproximación en la celda  $I_i$  y en el tiempo  $t_n$  dada por el esquema.  $W_i^n$  se supone una aproximación de los promedios de la solución exacta en cada celda:

$$W_i^n \cong \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t_n) dx.$$

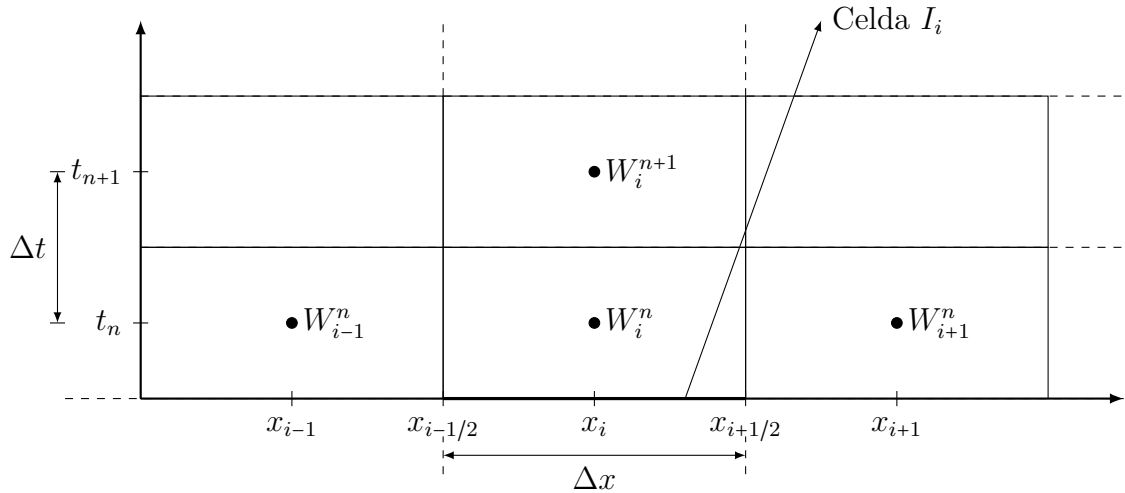


Figura 1.1: Esquema volúmenes finitos

Entonces, la expresión de un esquema numérico conservativo es:

$$W_i^{n+1} = W_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (G_{i-1/2} - G_{i+1/2}), \quad (1.3.2)$$

donde

$$G_{i+1/2} \cong \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(W(x_{i+1/2}, t)) dt. \quad (1.3.3)$$

Claramente, la expresión del esquema es el equivalente discreto a la igualdad (1.3.1) correspondiente al rectángulo  $I_i \times [t^n, t^{n+1}]$ .

Esta sencilla interpretación de un esquema numérico conservativo no es fácilmente adaptable al caso de sistemas no conservativos, donde no aparece una función de flujo  $F$ . Por ello, reescribimos (1.3.1) basándonos en la interpretación de  $[F(W)_x]$  como medida:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_1) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_0) dx - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b F(W(x, t))_x dx dt \right). \quad (1.3.4)$$

A continuación, definimos la función constante a trozos  $W^n$  cuyo valor en la celda  $I_i$  es la aproximación  $W_i^n$ . El equivalente discreto a (1.3.4) sería:

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \oint F(W^n)_x dx, \quad (1.3.5)$$

pero esta definición no corresponde a un esquema conservativo (1.3.2). En efecto, como  $W^n$  es constante a trozos, la medida  $[F(W^n)_x]$  sólo consta de la parte singular

$$\sum_i (F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)) \delta_{x=x_{i+1/2}}.$$

Pero, puesto que las celdas  $I_i$  se han definido como intervalos cerrados, en (1.3.5) la masa puntual situada en  $x_{i+1/2}$  debería contribuir a las dos celdas  $I_i$  y  $I_{i+1}$ . En este sentido, el esquema numérico conservativo (1.3.2) puede interpretarse como una *corrección* de (1.3.5): el flujo numérico se usa para descomponer las medidas de Dirac situadas en las interceldas de la siguiente manera:

$$(F(W_{i+1}^n) - F(W_i^n)) \delta_{x=x_{i+1/2}} = (F(W_{i+1}^n) - G_{i+1/2}) \delta_{x=x_{i+1/2}} + (G_{i+1/2} - F(W_i^n)) \delta_{x=x_{i+1/2}}.$$

Entonces, el primer sumando contribuye a la celda  $I_{i+1}$  y el segundo a la celda  $I_i$ :

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} ((F(W_i^n) - G_{i-1/2}) + (G_{i+1/2} - F(W_i^n))), \quad (1.3.6)$$

que obviamente equivale a (1.3.2).

Volvamos nuevamente al sistema no conservativo (1.1.1) y supongamos que se ha elegido una familia de caminos  $\Phi$  para definir las soluciones débiles. Dado un rectángulo

$[a, b] \times [t_0, t_1]$  en  $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ , una solución débil de (1.1.1) satisface la igualdad:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_1) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_a^b W(x, t_0) dx - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \mathcal{A}(W(x, t)) W_x(x, t) dx dt \right), \quad (1.3.7)$$

que generaliza a (1.3.1), siendo  $\Delta x = b - a$  y  $\Delta t = t_1 - t_0$ .

El equivalente discreto de (1.3.7) es ahora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t_{n+1}) dx &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t_n) dx \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathcal{A}(W(x, t)) W_x(x, t) dx dt, \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

donde, de nuevo,  $W^n$  es la función constante a trozos que toma el valor  $W_i^n$  en la celda  $I_i$ . La medida  $[\mathcal{A}(W^n)W_x^n]_\Phi$  vuelve a constar únicamente de la parte singular:

$$\sum_i \left( \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_i^n, W_{i+1}^n)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_i^n, W_{i+1}^n) ds \right) \delta_{x=x_{i+1/2}}.$$

Por tanto, las masas puntuales situadas en las interceldas deben descomponerse en dos términos  $\mathcal{D}_{i+1/2}^-$  y  $\mathcal{D}_{i+1/2}^+$ , que contribuyen a las celdas  $I_i$  e  $I_{i+1}$  respectivamente. Esta idea nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 1.3.1.** *Dada una familia de caminos  $\Phi$ , un esquema numérico se dice que es  $\Phi$ -conservativo si se puede escribir en la forma:*

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{D}_{i-1/2}^+ + \mathcal{D}_{i+1/2}^-), \quad (1.3.9)$$

donde

$$\mathcal{D}_{i+1/2}^\pm = \mathcal{D}^\pm(W_i^n, W_{i+1}^n),$$

siendo  $\mathcal{D}^-$  y  $\mathcal{D}^+$  dos funciones continuas de  $\Omega^2$  en  $\Omega$  que satisfacen

$$\mathcal{D}^\pm(W, W) = 0 \quad \forall W \in \Omega \quad (1.3.10)$$

y

$$\mathcal{D}^-(W_i, W_{i+1}) + \mathcal{D}^+(W_i, W_{i+1}) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_i, W_{i+1})) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_i, W_{i+1}) ds \quad (1.3.11)$$

para cada par  $(W_i, W_{i+1}) \in \Omega^2$ .

Los esquemas numéricos camino-conservativos satisfacen (1.3.7) a nivel discreto: si un esquema  $\Phi$ -conservativo es aplicado a las condiciones iniciales

$$W_i^0 \cong \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W_0(x) dx, \quad (1.3.12)$$

la igualdad

$$\int_{\mathbb{R}} W^{n+1}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} W^n(x) dx - \Delta t \int_{\mathbb{R}} \mathcal{A}(W^n(x)) W_x^n(x) dx, \quad (1.3.13)$$

puede obtenerse sumando en (1.3.9) y usando (1.3.11). La afirmación recíproca también es cierta: un esquema numérico de la forma

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} H(W_{i-1}^n, W_i^n, W_{i+1}^n), \quad (1.3.14)$$

que satisfaga (1.3.13) es  $\Phi$ -conservativo, es decir, puede escribirse en la forma (1.3.9) con  $\mathcal{D}^\pm$  satisfaciendo (1.3.10) y (1.3.11).

**Observación 1.3.1.** Nótese que la condición (1.3.11) juega un doble papel. Por un lado, se usa para aproximar las masas puntuales asociadas a las discontinuidades. Por otro lado, junto con (1.3.10), es un requisito de consistencia para soluciones regulares. En efecto, si  $W$  y  $\mathcal{A}(W)$  son suficientemente regulares y  $\mathcal{D}^\pm(W_i, W_{i+1})$  son también regulares, de (1.3.10) y (1.3.11) se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} (\mathcal{D}^+(W(x_i, t), W(x_{i+1}, t)) + \mathcal{D}^-(W(x_i, t), W(x_{i-1}, t))) \\ = \mathcal{A}(W(x_i, t)) W_x(x_i, t) + \mathcal{O}(\Delta x). \end{aligned}$$

Consideremos ahora el sistema (1.1.2) con condición inicial

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.3.15)$$

Para diseñar un esquema camino-conservativo, reescribimos en primer lugar el problema de Cauchy en la forma (1.1), con condición inicial  $W(x, 0) = W_0(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , con

$$W_0(x) = [w_0, \sigma]^T.$$

Ahora, tenemos que elegir una familia de caminos en  $\Omega$ . Usaremos la notación

$$W_L = \begin{bmatrix} w_L \\ \sigma_L \end{bmatrix}, \quad W_R = \begin{bmatrix} w_R \\ \sigma_R \end{bmatrix}, \quad (1.3.16)$$

para los estados, y

$$\tilde{\Phi}(s; W_L, W_R) = \begin{bmatrix} \Phi(s; W_L, W_R) \\ \Phi_{m+1}(s; W_L, W_R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(s; W_L, W_R) \\ \vdots \\ \Phi_m(s; W_L, W_R) \\ \Phi_{m+1}(s; W_L, W_R) \end{bmatrix}, \quad (1.3.17)$$

para los caminos que conectan los estados. Se eligen dos funciones  $\mathcal{D}^\pm$  que satisfacen (1.3.10) y (1.3.11). Se usará la siguiente notación:

$$\mathcal{D}^\pm(W_i, W_{i+1}) = \begin{bmatrix} D^\pm(W_i, W_{i+1}) \\ D_{m+1}^\pm(W_i, W_{i+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1^\pm(W_i, W_{i+1}) \\ \vdots \\ D_m^\pm(W_i, W_{i+1}) \\ D_{m+1}^\pm(W_i, W_{i+1}) \end{bmatrix}. \quad (1.3.18)$$

Teniendo en cuenta la definición en (1.1) de  $\mathcal{A}(W)$ , podemos escribir (1.3.11) como sigue:

$$\begin{aligned} D^-(W_i, W_{i+1}) + D^+(W_i, W_{i+1}) &= \\ &= F(w_{i+1}) - F(w_i) + \int_0^1 B(\Phi(s; W_i, W_{i+1})) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_i, W_{i+1}) ds \\ &\quad - \int_0^1 S(\Phi(s; W_i, W_{i+1})) \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial s}(s; W_i, W_{i+1}) ds, \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

$$D_{m+1}^-(W_i, W_{i+1}) + D_{m+1}^+(W_i, W_{i+1}) = 0, \quad (1.3.20)$$

y el esquema numérico se reduce a

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (D_{i-1/2}^+ + D_{i+1/2}^-), \quad (1.3.21)$$

$$\sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (D_{m+1,i-1/2}^+ + D_{m+1,i+1/2}^-), \quad (1.3.22)$$

donde

$$\begin{aligned} D_{i+1/2}^\pm &= D^\pm(W_i^n, W_{i+1}^n), \\ D_{m+1,i+1/2}^\pm &= D_{m+1}^\pm(W_i^n, \dots, W_{i+1}^n). \end{aligned}$$

Los valores iniciales en las celdas vienen dados por:

$$w_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w_0(x) dx \quad y \quad \sigma_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \sigma(x) dx.$$

De acuerdo a la ecuación (1.1.3), la aproximaciones numéricas de  $\sigma$  deberían ser constantes en el tiempo, es decir

$$\sigma_i^n = \sigma_i^0 \quad \forall i, n.$$

Esto se satisface, obviamente, si

$$D_{m+1}^\pm \equiv 0. \quad (1.3.23)$$

En lo que sigue, buscaremos esquemas numéricos que satisfagan (1.3.23).

En la mayoría de los casos es posible reformular el esquema numérico de forma que se acerque a la formulación original (1.1.2) del problema. Se producirá este caso si la familia de caminos satisface el siguiente requerimiento:

(R0) Existe una familia de caminos  $\Phi$  en  $\mathcal{O}$  tal que si  $W_L = [w_L, \sigma_L]^T$  y  $W_R = [w_R, \sigma_R]^T$  verifican  $\sigma_L = \sigma_R = \tilde{\sigma}$ , entonces

$$\tilde{\Phi}(s; W_L, W_R) = \begin{bmatrix} \Phi(s; W_L, W_R) \\ \tilde{\sigma} \end{bmatrix} \quad \forall s \in [0, 1]. \quad (1.3.24)$$

Este requerimiento es natural, en el sentido que implica que, si el esquema numérico se aplica a un problema en el que  $\sigma$  es constante, entonces se reduce a un método  $\Phi$ -conservativo para el problema homogéneo:

$$w_t + F(w)_x + B(w)w_x = 0. \quad (1.3.25)$$

Asumamos que (R0) se satisface y fijemos un valor para  $\sigma$ , digamos  $\tilde{\sigma}$ . Dados

$$W_i = [w_i, \sigma_i]^T, \quad W_{i+1} = [w_{i+1}, \sigma_{i+1}]^T$$

en  $\Omega$ , definimos:

$$G(W_i, W_{i+1}) = D^-([w_i, \tilde{\sigma}]^T, [w_{i+1}, \tilde{\sigma}]^T) + F(w_i) - \frac{1}{2} \int_0^1 B(\Phi(s; w_i, w_{i+1})) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; w_i, w_{i+1}) ds, \quad (1.3.26)$$

$$G(W_i, W_{i+1}) = F(w_{i+1}) - D^+([w_i, \tilde{\sigma}]^T, [w_{i+1}, \tilde{\sigma}]^T) + \frac{1}{2} \int_0^1 B(\Phi(s; w_i, w_{i+1})) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; w_i, w_{i+1}) ds. \quad (1.3.27)$$

Aplicando la igualdad (1.3.19) a los estados  $[w_i, \tilde{\sigma}]^T$ ,  $[w_{i+1}, \tilde{\sigma}]^T$  y usando (R0), se puede ver fácilmente que (1.3.26) y (1.3.27) definen una misma función  $G$ . Ahora de (1.3.10) y (R0) obtenemos:

$$G(W, W) = F(w) \quad \forall W = [w, \sigma]^T \in \Omega, \quad (1.3.28)$$

y entonces  $G$  puede interpretarse como un flujo numérico consistente con  $F$ .

Ahora, dados  $W_i, W_{i+1}$  en  $\Omega$ , definimos:

$$B^-(W_i, W_{i+1}) = \frac{1}{2} \int_0^1 B(\Phi(s; W_i, W_{i+1})) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_i, W_{i+1}) ds, \quad (1.3.29)$$

$$B^+(W_i, W_{i+1}) = \frac{1}{2} \int_0^1 B(\Phi(s; W_i, W_{i+1})) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_i, W_{i+1}) ds, \quad (1.3.30)$$



$$S^-(W_i, W_{i+1}) = G(W_i, W_{i+1}) - F(w_i) + B^-(W_i, W_{i+1}) - D^-(W_i, W_{i+1}), \quad (1.3.31)$$

$$S^+(W_i, W_{i+1}) = F(w_i) - G(W_i, W_{i+1}) + B^+(W_i, W_{i+1}) - D^+(W_i, W_{i+1}). \quad (1.3.32)$$

Las siguientes igualdades puede verificarse fácilmente:

$$B^-(W_i, W_{i+1}) + B^+(W_i, W_{i+1}) = \int_0^1 B(\Phi(s; W_i, W_{i+1})) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_i, W_{i+1}) ds, \quad (1.3.33)$$

$$S^-(W_i, W_{i+1}) + S^+(W_i, W_{i+1}) = \int_0^1 S(\Phi(s; W_i, W_{i+1})) \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial s}(s; W_i, W_{i+1}) ds. \quad (1.3.34)$$

Ahora, el esquema numérico (1.3.21) puede reescribirse como:

$$w_i^{n+1} = w_i^n + \frac{\Delta x}{\Delta t} (G_{i-1/2} - G_{i+1/2} - B_{i-1/2}^+ - B_{i+1/2}^- + S_{i-1/2}^+ + S_{i+1/2}^-), \quad (1.3.35)$$

donde

$$G_{i+1/2} = G(W_i^n, W_{i+1}^n), \quad (1.3.36)$$

$$B_{i+1/2}^\pm = B^\pm(W_i^n, W_{i+1}^n), \quad (1.3.37)$$

$$S_{i+1/2}^\pm = S^\pm(W_i^n, W_{i+1}^n). \quad (1.3.38)$$

Por otro lado, cualquier esquema numérico de la forma (1.3.35)-(1.3.38) con  $G, B^\pm, S^\pm$  satisfaciendo (1.3.28), (1.3.33) y (1.3.34) respectivamente, es un esquema camino-conservativo para una familia  $\tilde{\Phi}$ .

En particular, si el sistema es conservativo, es decir,  $B \equiv 0, S \equiv 0$ , la discusión anterior muestra que cada esquema numérico camino-conservativo es equivalente al esquema conservativo con flujo numérico

$$\begin{aligned} G(W_i, W_{i+1}) &= D^-(W_i, W_{i+1}) + F(w_i) \\ &= -D^+(W_i, W_{i+1}) + F(w_{i+1}). \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

Y por otro lado, un esquema numérico conservativo es camino-conservativo para cualquier familia de caminos. Como consecuencia, el concepto de esquema numérico camino-conservativo es una generalización de esquema conservativo.

Finalmente, reparemos en que la expresión de un esquema numérico (1.3.21) en la forma (1.3.35) no es única: por un lado, tenemos que elegir un valor arbitrario para  $\sigma$ , y por otro lado,  $B^\pm$  puede ser sustituido por cualquier par de funciones que satisfagan (1.3.33).

### 1.3.1. Convergencia y elección de caminos

Como hemos visto, los esquemas numéricos camino-conservativos para una familia de caminos  $\Phi$  generaliza el concepto usual de esquema numérico conservativo para sistemas de leyes de conservación.

Efectivamente, si (1.1.1) es un sistema de leyes de conservación, es decir,  $\mathcal{J}$  es la matriz jacobiana de una función de flujo  $F$ , todo esquema numérico  $\Phi$ -conservativo es consistente y conservativo en el sentido usual. Recíprocamente, todo esquema numérico camino conservativo y consistente es  $\Phi$ -conservativo. Por otro lado, el teorema de Lax-Wendroff establece que si las aproximaciones obtenidas por un esquema numérico conservativo convergen (en un sentido a precisar), el límite es una solución débil del problema de valores iniciales asociado al sistema de leyes de conservación. Por tanto, si las soluciones numéricas proporcionadas por un esquema numérico conservativo convergen a una función discontinua, sus discontinuidades deben satisfacer las condiciones de Rankine-Hugoniot (1.2.8).

Nos preguntamos ahora si los esquemas  $\Phi$ -conservativos satisfacen un resultado similar para sistemas (1.1.1). En [26] se probó el siguiente resultado:

**Teorema 1.3.1.** *Sea  $W_{\Delta x}$  la aproximación numérica obtenida de un esquema numérico  $\Phi$ -conservativo aplicado a la condición inicial (1.3.12). Supongamos que existe una función  $W \in (L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap BV(\mathbb{R} \times [0, \infty)))^N$  tal que, para cada  $t \in [0, \infty)$ ,*

$$W_{\Delta x}(\cdot, t) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} W(\cdot, t) \quad \text{uniformemente en el sentido de los grafos,} \quad (1.3.40)$$

*y que existe una constante  $C$  tal que*

$$\|W_{\Delta x}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \quad \text{para todo } t \in [0, \infty), \text{ con } \Delta x > 0 \quad (1.3.41)$$

*y*

$$TV(W_{\Delta x}(\cdot, t)) \leq C \quad \text{para todo } t \in [0, \infty), \text{ con } \Delta x > 0 \quad (1.3.42)$$

*Entonces  $W$  es una  $\Phi$ -solución del sistema (1.1.1) con condición inicial  $W(x, 0) = W_0(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ .*

Sin embargo, la convergencia en el sentido de los grafos es demasiado fuerte (véase [44] y [26] para más detalles) y sólo esquemas como los de Glimm y *front tracking* la satisfacen. En general, las aproximaciones de esquemas  $\Phi$ -conservativos convergen a soluciones débiles de un sistema perturbado de (1.1.1): aparece un término fuente que corresponde a una medida del error de convergencia con soporte en las discontinuidades (véase [26]).

En ciertas situaciones especiales, la medida del error de convergencia es idénticamente cero. Este es el caso de los sistemas de leyes de equilibrio, en los que pueden aparecer dos tipos de discontinuidades en las soluciones débiles: choques que avanzan en regiones donde el término fuente es continuo y que satisfacen las condiciones de Rankine-Hugoniot usuales; y discontinuidades de contacto estacionarias situadas sobre las discontinuidades del término fuente. Si la familia de caminos  $\Phi$  elegida para construir el esquema  $\Phi$ -conservativo satisface  $(H1)$ , entonces todas las discontinuidades son aproximadas correctamente y las soluciones numéricas convergen a las soluciones correctas. No obstante, los sistemas de leyes de equilibrio pueden también presentar una dificultad adicional (el problema de resonancia) si uno de los autovalores de la matriz Jacobiana se anula. En este caso, las soluciones débiles no están determinadas de manera única por los datos iniciales, y los límites de las soluciones numéricas pueden depender al mismo tiempo de la familia de caminos y del propio esquema numérico.

En general, si queremos asegurar la convergencia de las soluciones numéricas hacia una función que sea solución clásica, que sea regular y cuyas discontinuidades concuerden con la física del problema, debemos llevar a cabo los siguientes pasos:

- Elegir una regularización del sistema hiperbólico que sea compatible con la física del problema.
- Calcular una familia de caminos compatible con esta regularización.
- Considerar un esquema numérico cuyas soluciones converjan a la solución débil correspondiente a la familia de caminos.

En la práctica, esto anterior puede resultar muy costoso y difícil de llevar a cabo. El cálculo efectivo de una familia de caminos compatible con una regularización dada requiere el cálculo de los correspondientes “perfiles viscosos”. Por otro lado, como hemos mencionado en líneas anteriores, la convergencia de las soluciones numéricas hacia la soluciones débiles correctas sólo está garantizada para los métodos de Glimm y *front tracking* cuya implementación puede también ser muy costosa y tediosa, ya que requiere el conocimiento explícito de la solución del problema de Riemann. De hecho, cuando tomamos el modelo no conservativo como una versión simplificada de uno más complejo (pero conservativo), como ocurre en esta memoria, la estrategia mencionada puede terminar siendo más costosa que resolver directamente el problema complejo en sí.

Por estas razones, el uso de estrategias numéricas basadas en una discretización directa del sistema no conservativo está completamente justificado. En este caso, la elección de esquemas numéricos camino-conservativos tiene las siguientes ventajas:

- Las soluciones numéricas satisfacen una *propiedad conservativa* (1.3.13), compatible con la definición rigurosa de producto no conservativo. En particular, si el sistema tiene un subsistema conservativo, el esquema numérico es conservativo para ese subsistema en el sentido usual.
- Las aproximaciones de los choques dadas por los esquemas son compatibles con la regularización del sistema con términos de alto orden que se hacen cero cuando  $\Delta x$  tiende a cero.
- Como originalmente se apunta en [76], en el caso más simple de ecuaciones hiperbólicas escalares, el error de convergencia solo se aprecia para mallas muy finas, para discontinuidades de gran amplitud y/o para tiempos de simulación prolongados.
- La estrategia es fácilmente aplicable a métodos de alto orden o a problemas multidimensionales.

Recientemente se han presentado esquemas numéricos camino-conservativos que permiten disminuir considerablemente el error de convergencia (véase [35]). Estos esquemas son la generalización de los esquemas que preservan la entropía (“entropy-preservative”) introducidos por Tadmor en [127], a problemas no conservativos.

El principal inconveniente con el que nos encontramos es que la velocidad y amplitud de los choques simulados dependen tanto de la familia de caminos como de la viscosidad numérica del esquema (véase [26]). Como consecuencia, no sólo dos esquemas que sean camino-conservativos para diferentes familias de caminos pueden dar diferentes aproximaciones en un choque, sino también dos esquemas numéricos diferentes basados en la misma familia de caminos, pueden presentar los mismo problemas (véanse ejemplos en [26] y [112]). De hecho este inconveniente se extiende a todos los métodos que presentan alguna viscosidad numérica. Sin embargo, como se menciona en líneas anteriores, con frecuencia estas diferencias son pequeñas en comparación con los errores de discretización y pueden pasar inadvertidas en situaciones prácticas.

En la práctica, se puede elegir una familia de caminos simple para diseñar esquemas numéricos y posteriormente se pueden comparar los resultados que ofrecen dichos esquemas con datos experimentales para validar el modelo resultante. La elección canónica de una familia de caminos está dada por la familia de segmentos:

$$\Phi(s; W_L, W_R) = W_L + s(W_R - W_L). \quad (1.3.43)$$

Con esta elección, la definición de productos no conservativos es equivalente a la propuesta por Volpert en [136].

En [34] se prueba la siguiente propiedad de aproximación de los segmentos:

**Teorema 1.3.2.** *Supongamos que  $\mathcal{A} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{M \times M}$  tiene derivadas de segundo orden. Sean  $W_L$  y  $W_R$  un par de estados en  $\Omega$  tales que existe  $\lambda$  tal que satisface*

$$\lambda(W_R - W_L) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Psi(s; W_L, W_R)) \Psi_s(s; W_L, W_R) ds \quad (1.3.44)$$

*Entonces, dada cualquier otra familia de caminos  $\Phi : [0, 1] \times \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$  con derivadas de segundo orden continuas, se tiene que*

$$\lambda(W_R - W_L) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \Phi_s(s; W_L, W_R) ds + O(|W_R - W_L|^3). \quad (1.3.45)$$

**Demostración.-** Sea  $\gamma \in [0, L] \rightarrow \phi(\gamma)$  un arco cuya parametrización es

$$s \in [0, 1] \rightarrow \Phi(s; W_L, W_R),$$

y cuya longitud denotaremos por  $L$ . Aplicando la regla del punto medio y usando el desarrollo de Taylor obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \Phi_s(s; W_L, W_R) ds \\ &= \int_0^L \mathcal{A}(\phi(\gamma)) \phi'(\gamma) d\gamma \\ &= LA \left( \phi \left( \frac{L}{2} \right) \right) \phi' \left( \frac{L}{2} \right) + O(L^3) \\ &= LA \left( \phi \left( \frac{L}{2} \right) \right) (\phi(L) - \phi(0)) + O(L^3) \\ &= LA \left( \phi \left( \frac{L}{2} \right) \right) (W_R - W_L) + O(L^3) \\ &= A \left( \frac{1}{2} (\phi(0) + \phi(L)) \right) (W_R - W_L) + (W_R - W_L) O(L^2) + O(L^3) \\ &= A \left( \frac{1}{2} (W_L + W_R) \right) (W_R - W_L) + (W_R - W_L) O(L^2) + O(L^3). \end{aligned}$$

De la definición de una familia de caminos, existe una constante  $K$  tal que

$$|\delta_s \Phi(s; W_L, W_R)| \leq K |W_R - W_L|, \quad \forall s.$$

Integrando en  $[0, 1]$  se obtiene  $L \leq K |W_R - W_L|$ , de donde se deduce la siguiente igualdad.

$$\int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \Phi_s(s; W_L, W_R) ds = A \left( \frac{1}{2} (W_L + W_R) \right) (W_R - W_L) + O(|W_R - W_L|^3) \quad (1.3.46)$$

para toda familia de caminos suficientemente regular. En particular, para el caso de  $\Psi$  es cierto:

$$\int_0^1 \mathcal{A}(\Psi(s; W_L, W_R)) \Psi_s(s; W_L, W_R) ds = A \left( \frac{1}{2} (W_L + W_R) \right) (W_R - W_L) + O(|W_R - W_L|^3) \quad (1.3.47)$$

Teniendo en cuenta las dos ecuaciones anteriores concluimos que

$$\begin{aligned}\lambda(W_R - W_L) &= \int_0^1 \mathcal{A}(\Psi(s; W_L, W_R)) \Psi_s(s; W_L, W_R) \\ &= A\left(\frac{1}{2}(W_L + W_R)\right)(W_R - W_L) + O(|W_R - W_L|^3) \\ &= \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \Phi_s(s; W_L, W_R) + O(|W_R - W_L|^3).\end{aligned}$$

■

Por último, hay que reseñar que los métodos camino-conservativos descritos en esta memoria verifican que la matriz de viscosidad conmuta con  $\mathcal{A}(W)$ . En tal caso, Alouges-Merlet [2] demostraron que las soluciones numéricas proporcionadas por diferentes esquemas numéricos no difieren excesivamente unas de otras ya que las curvas de Hugoniot asociadas a cada esquema numérico son prácticamente idénticas.

## 1.4. Esquemas bien equilibrados

El buen equilibrio está relacionado con la capacidad de un esquema numérico para aproximar el equilibrio, es decir, las soluciones estacionarias. El sistema (1.1.1) sólo puede poseer soluciones estacionarias no triviales si posee algún campo linealmente degenerado: si  $W(x)$  es una solución estacionaria, satisface

$$\mathcal{A}(W(x)) \cdot W'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si  $W'(x) \neq 0$ , entonces 0 es un autovalor de  $\mathcal{A}(W(x))$  para todo  $x$  y  $W'(x)$  es un autovector asociado. Por tanto,  $x \mapsto W(x)$  se puede interpretar como una parametrización de una curva integral a lo largo de un campo característico linealmente degenerado cuyo correspondiente autovalor toma el valor 0 a lo largo de la curva.

Además, si introducimos el conjunto  $\Gamma$  de todas las curvas integrales  $\gamma$  de un campo linealmente degenerado de  $\mathcal{A}(W)$  tal que el correspondiente autovalor se haga 0 en  $\gamma$ , las soluciones estacionarias del sistema pueden considerarse parametrizaciones de arco de curvas pertenecientes a  $\Gamma$  en las que  $x$  es el parámetro.

De acuerdo a [102] introducimos las siguientes definiciones:

**Definición 1.4.1.** *Dada una curva  $\gamma \in \Gamma$ , un esquema numérico para resolver (1.1.1) se dice que es exactamente bien equilibrado para  $\gamma$  si resuelve exactamente cualquier solución regular estacionaria  $W$  tal que*

$$W(x) \in \gamma \quad \forall x \tag{1.4.1}$$

en el sentido siguiente: si el esquema numérico se aplica a valores iniciales

$$W_i^0(x) = W(x_i) \quad \forall i,$$

entonces

$$W_i^n = W_i^0 \quad \forall n, i.$$

El esquema se dice que es bien equilibrado de orden  $k$  para  $\gamma$  si resuelve hasta orden  $k$  cualquier solución regular estacionaria que satisfaga (1.4.1). Finalmente, el esquema se dice exactamente bien equilibrado o bien equilibrado de orden  $k$  si estas propiedades se satisfacen para cualquier curva de  $\Gamma$ .

A fin de que el esquema numérico sea bien equilibrado para una curva  $\gamma \in \Gamma$ , debemos elegir una familia de caminos que satisfaga la propiedad siguiente (véase [102]):

(WBP) Dados estados  $W_L$  y  $W_R$  en  $\gamma$ , el camino  $\Phi(s; W_L, W_R)$  es una parametrización del arco de  $\gamma$  que une estos estados.

## 1.5. Resolvedores de Riemann aproximados

En [103], se presenta una generalización de la definición de resolvedores de Riemann aproximados para sistemas no conservativos.

**Definición 1.5.1.** Dada una familia de caminos  $\Phi$ , un resolvedor  $\Phi$ -aproximado de Riemann para (1.1.1) es una función  $V : \mathbb{R} \times \Omega \times \Omega \mapsto \Omega$  que satisface:

(i) para cada  $W \in \Omega$

$$V(v, W, W) = W \quad \forall v \in \mathbb{R}, W \in \Omega,$$

(ii) para cada  $W_L, W_R \in \Omega$ , existe  $\lambda_{\min}(W_L, W_R), \lambda_{\max}(W_L, W_R)$  en  $\mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} V(v; W_L, W_R) &= W_L \quad \text{si } v < \lambda_{\min}(W_L, W_R), \\ V(v; W_L, W_R) &= W_R \quad \text{si } v > \lambda_{\max}(W_L, W_R), \end{aligned}$$

(iii) para cada  $W_L, W_R \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds + \\ + \int_0^\infty (V(v; W_L, W_R) - W_R) dv + \\ + \int_{-\infty}^0 (V(v; W_L, W_R) - W_L) dv = 0. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Se espera que  $V(x/t; W_L, W_R)$  sea una aproximación de una solución autosimilar del problema de Riemann:

$$\begin{cases} W_t + \mathcal{A}(W)W_x = 0 \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < 0 \\ W_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (1.5.2)$$

donde la familia de caminos  $\Phi$  se usa para dar sentido al producto no conservativo.

Dado un resolvidor de Riemann  $\Phi$ -aproximado para (1.1.1), se puede construir un esquema numérico de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} = & \frac{1}{\Delta x} \left( \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} V\left(\frac{x - x_{i-1/2}}{\Delta t}; W_{i-1}^n, W_i^n\right) dx \right. \\ & \left. + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} V\left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; W_i^n, W_{i+1}^n\right) dx \right) \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Teniendo como condición CFL a  $1/2$ , el esquema numérico se puede escribir en la forma (1.3.9) con

$$\mathcal{D}_{i+1/2}^- = - \int_{-\infty}^0 (V(v; W_i^n, W_{i+1}^n) - W_i^n) dv, \quad (1.5.4)$$

$$\mathcal{D}_{i+1/2}^+ = - \int_0^{\infty} (V(v; W_i^n, W_{i+1}^n) - W_{i+1}^n) dv. \quad (1.5.5)$$

Queda claro de (1.5.1) que un esquema numérico (1.3.9) basado en un resolvidor  $\Phi$ -aproximado de Riemann es  $\Phi$ -conservativo. Además, es bien equilibrado para una curva  $\gamma \in \Gamma$  si y sólo si, dados dos estados  $W_L$  y  $W_R$  en  $\gamma$ , se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 (V(v; W_L, W_R) - W_L) dv &= 0, \\ \int_0^{\infty} (V(v; W_L, W_R) - W_R) dv &= 0. \end{aligned}$$

Estas igualdades se satisfacen, de manera trivial, si

$$V(v; W_L, W_R) = \begin{cases} W_L & \text{si } v < 0 \\ W_R & \text{si } v > 0. \end{cases} \quad (1.5.6)$$

Un caso particular de resolvidores de Riemann aproximados son los resolvidores de Riemann simples:

**Definición 1.5.2.** Sea  $\Phi$  una familia de caminos en  $\Omega$ . Supongamos que, para cada par de estados  $W_L, W_R \in \Omega$ , se consideran un número finito  $s \geq 1$  de velocidades

$$\sigma_0 = -\infty < \sigma_1 < \dots < \sigma_s < \sigma_{s+1} = +\infty \quad (1.5.7)$$



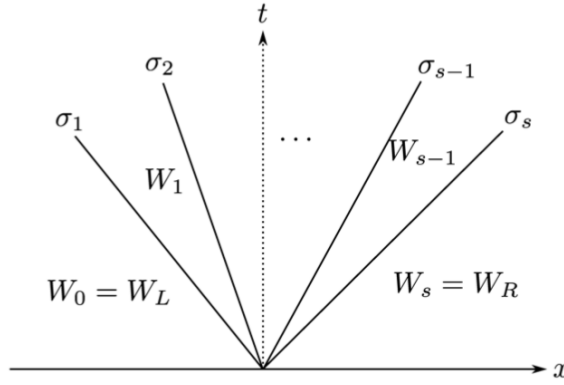


Figura 1.2: Representación del resolvedor de Riemann simple con s ondas

y  $s - 1$  estados intermedios

$$W_0 = W_L, W_1, \dots, W_{s-1} = W_R. \quad (1.5.8)$$

La función  $V : \mathbb{R} \times \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$  (ver Figura 1.2) dada por

$$V(\xi, W_L, W_R) = W_j \quad \text{si } \sigma_j < \xi < \sigma_{j+1} \quad (1.5.9)$$

se dice que es un resolvedor de Riemann simple  $\Phi$ -aproximado para (1.1.1) si satisface la relación de consistencia:

$$V(\xi, W, W) = W, \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad \forall W \in \Omega \quad (1.5.10)$$

y la propiedad  $\Phi$ -conservativo

$$\sum_{j=1}^s \sigma_j (W_j - W_{j-1}) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(\xi; W_L, W_R)) \quad (1.5.11)$$

El ejemplo más sencillo de resolvedor de Riemann simple es el que se obtiene con  $s = 2$  que corresponde a la extensión del esquema HLL (véase [70]) a sistemas no conservativos. El resolvedor HLL queda perfectamente definido conociendo la velocidad de propagación de dos ondas  $\sigma_1 = S_L = \lambda_{\min}(W_L, W_R)$  y  $\sigma_2 = S_R = \lambda_{\max}(W_L, W_R)$  que conectan los estados  $W_L$ ,  $W^*$  y  $W_R$ :

$$V^{HLL}(v; W_L, W_R) = \begin{cases} W_L & \text{si } v \leq S_L, \\ W^* & \text{si } S_L \leq v \leq S_R, \\ W_R & \text{si } v \geq S_R. \end{cases} \quad (1.5.12)$$

La condición de consistencia (1.5.11) se reduce en este caso a

$$S_L(W^* - W_L) + S_R(W_R - W^*) = \int_0^1 A(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds,$$

lo que permite determinar de forma única el estado intermedio  $W^*$

$$W^* = \frac{S_R W_R - S_L W_L - \int_0^1 A(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds}{S_R - S_L}. \quad (1.5.13)$$

Obsérvese que en el caso de que el sistema sea conservativo, esta definición corresponde con la definición usual y es independiente de la elección de la familia de caminos.

Es claro que con la definición anterior, el esquema HLL no es bien-equilibrado, ya que no tiene por qué satisfacer la condición (1.5.6). En [37] se propone una modificación para conseguir que el esquema HLL sea bien equilibrado. Una de las aportaciones originales de este trabajo ha sido la construcción de un esquema HLLC para el sistema de Ripa que sea bien equilibrado para dos familias relevantes de soluciones estacionarias con velocidad nula. Para ello haremos uso de las nociones que hemos presentado en esta sección.

## 1.6. Método de Roe

Los métodos de Roe se basan en resolutores de Riemann simples y lineales:  $V(x/t; W_L, W_R)$  es una solución autosimilar del problema de Riemann lineal:

$$\begin{cases} U_t + \mathcal{A}(W_L, W_R) U_x = 0, \\ U(x, 0) = \begin{cases} W_L & \text{si } x < 0 \\ W_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (1.6.1)$$

donde  $\mathcal{A}(W_L, W_R)$  es una linealización de  $\mathcal{A}(W)$ .

Se puede mostrar fácilmente que este es un resolutor  $\Phi$ -aproximado de Riemann si y sólo si  $\mathcal{A}(W_L, W_R)$  es una linealización de Roe en el sentido definido por Toumi en [132]:

**Definición 1.6.1.** *Dada una familia de caminos  $\Phi$ , una función  $\mathcal{A}_\Phi : \Omega \times \Omega \mapsto \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$  se llama linealización de Roe si verifica las siguientes propiedades:*

- para cada  $W_L, W_R \in \Omega$ ,  $\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R)$  tiene  $N$  autovalores reales y distintos,
- $\mathcal{A}_\Phi(W, W) = \mathcal{A}(W)$  para cada  $W \in \Omega$ ,
- para cada  $W_L, W_R \in \Omega$ ,

$$\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R) \cdot (W_R - W_L) = \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds. \quad (1.6.2)$$

Una vez que se ha escogido la linealización, seguimos la discretización en volúmenes finitos introducida en la Sección 1.3, y discretizamos el sistema considerando las celdas computacionales  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ . Asumimos por simplicidad que las celdas tienen el mismo tamaño constante  $\Delta x$ , y que  $x_{i+1/2} = i\Delta x$ , siendo  $x_i = (i - 1/2)\Delta x$  el centro de la celda  $I_i$ ,  $\Delta t$  el paso de tiempo y  $t^n = n\Delta t$ .

De manera usual, notamos por  $W_i^n$  la aproximación de los promedios de la solución exacta en la celda  $I_i$  y en el tiempo  $t_n$  dada por el esquema.

$$W_i^n \cong \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t_n) dx.$$

Para calcular estas aproximaciones, vamos a introducir las matrices intermedias

$$\mathcal{A}_{i+1/2} = \mathcal{A}_\Phi(W_i^n, W_{i+1}^n). \quad (1.6.3)$$

Los autovalores y autovectores asociados de la matriz se denotan, respectivamente por

$$\lambda_{1,i+1/2} < \lambda_{2,i+1/2} < \dots < \lambda_{N,i+1/2} \quad y \quad \{R_{l,i+1/2}\}_{l=1}^N.$$

Denotamos también  $\mathcal{K}_{i+1/2}$  la matriz  $N \times N$  cuyas columnas son los autovectores de  $\mathcal{A}_{i+1/2}$  y por  $\mathcal{L}_{i+1/2}$  la matriz diagonal cuyos coeficientes son los autovalores de  $\mathcal{A}_{i+1/2}$ . Sean  $\mathcal{L}_{i+1/2}^+$ ,  $\mathcal{L}_{i+1/2}^-$ ,  $\mathcal{A}_{i+1/2}^+$  y  $\mathcal{A}_{i+1/2}^-$  las matrices definidas por

$$\mathcal{L}_{i+1/2}^\pm = \begin{bmatrix} (\lambda_{1,i+1/2})^\pm & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\lambda_{N,i+1/2})^\pm \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{i+1/2}^\pm = \mathcal{K}_{i+1/2} \mathcal{L}_{i+1/2}^\pm \mathcal{K}_{i+1/2}^{-1}. \quad (1.6.4)$$

El esquema numérico evoluciona en el tiempo de la siguiente manera: una vez se han calculado las aproximaciones en el tiempo  $t^n$ ,  $W_i^n$ , se considera un problema de Riemann en cada intercelda  $x_{i+1/2}$ , cuya matriz es  $\mathcal{A}_{i+1/2}$ , siendo los estados a derecha e izquierda  $W_i^n$  y  $W_{i+1}^n$ . Así obtenemos las aproximaciones en el tiempo  $t^{n+1}$ ,  $W_i^{n+1}$ , haciendo el promedio de las soluciones en las celdas para este problema lineal.

Bajo la hipótesis

$$x_{i-1/2} + \lambda_{N,i-1/2}\Delta t \leq x_i \leq x_{i+1/2} + \lambda_{1,i+1/2}\Delta t, \quad (1.6.5)$$

se pueden obtener las aproximaciones en el tiempo  $t^n$  mediante la formula:

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathcal{A}_{i-1/2}^+ \cdot (W_i^n - W_{i-1}^n) + \mathcal{A}_{i+1/2}^- \cdot (W_{i+1}^n - W_i^n) \right), \quad (1.6.6)$$

que es la expresión general del esquema de Roe para el sistema  $W_t + \mathcal{A}(W)W_x = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ .

En la práctica, la condición CFL usual es

$$\max \left\{ |\lambda_{l,i+1/2}|, 1 \leq l \leq N, i \in \mathbb{Z} \right\} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \gamma, \quad \text{con } 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (1.6.7)$$

Observemos que el método de Roe es  $\Phi$ -conservativo. Efectivamente, si definimos

$$\mathcal{D}^\pm(W_L, W_R) = \mathcal{A}_\Phi^\pm(W_L, W_R)(W_R - W_L),$$

se tiene trivialmente que

$$\mathcal{D}^\pm(W, W) = 0 \quad \forall W \in \Omega.$$

Haciendo uso de las definiciones de  $\mathcal{A}_\Phi^\pm(W_L, W_R)$  y de (1.6.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+(W_L, W_R) + \mathcal{D}^-(W_L, W_R) &= \\ \mathcal{A}_\Phi^+(W_L, W_R)(W_R - W_L) + \mathcal{A}_\Phi^-(W_L, W_R)(W_R - W_L) &= \\ \mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R)(W_R - W_L) &= \int_0^1 \mathcal{A}(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds \end{aligned}$$

Veamos a continuación cómo podemos definir una linealización de Roe para el sistema (1.1.2). Siguiendo [102] podemos definir una linealización de Roe  $\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R)$  de la forma:

$$\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R) = \left[ \begin{array}{c|c} A_\Phi(w_L, w_R) & -S_\Phi(w_L, w_R) \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \quad (1.6.8)$$

donde

$$A_\Phi(w_L, w_R) = J(w_L, w_R) + B_\Phi(w_L, w_R). \quad (1.6.9)$$

En este caso,  $J(w_L, w_R)$  es una linealización de Roe del Jacobiano del flujo  $F$  en el sentido usual:

$$J(w_L, w_R) \cdot (w_R - w_L) = F(w_R) - F(w_L) \quad (1.6.10)$$

y

$$B_\Phi(w_L, w_R) \cdot (w_R - w_L) = \int_0^1 B(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi_{[1, \dots, m]}}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds. \quad (1.6.11)$$

$$S_\Phi(w_L, w_R) \cdot (\sigma_R - \sigma_L) = \int_0^1 S(\Phi(s; W_L, W_R)) \frac{\partial \Phi_{m+1}}{\partial s}(s; W_L, W_R) ds. \quad (1.6.12)$$

Teniendo en cuenta la forma de la matriz  $\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R)$  en (1.6.8) y la de sus autovectores en (1.1) podemos escribir

$$\mathcal{A}_\Phi^\pm(W_L, W_R) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A_\Phi^\pm(w_L, w_R)}{0} & \frac{-A_\Phi^\pm(w_L, w_R)A_\Phi^{-1}(w_L, w_R)S_\Phi(w_L, w_R)}{0} \end{array} \right], \quad (1.6.13)$$

$$|\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R)| = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{|A_\Phi(w_L, w_R)|}{0} & \frac{-|A_\Phi(w_L, w_R)|A_\Phi^{-1}(w_L, w_R)S_\Phi(w_L, w_R)}{0} \end{array} \right]. \quad (1.6.14)$$

Además,

$$\mathcal{A}_\Phi^\pm(W_L, W_R) = \frac{1}{2} (\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R) \pm |\mathcal{A}_\Phi(W_L, W_R)|). \quad (1.6.15)$$

Usando las igualdades anteriores, podemos escribir un esquema de Roe para el sistema (1.1.2) como:

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( D_{i-1/2}^+(w_{i-1}^n, w_i^n, \sigma_{i-1}, \sigma_i) + D_{i+1/2}^-(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) \right) \quad (1.6.16)$$

donde

$$\begin{aligned} D_{i+1/2}^\pm(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) &= \frac{1}{2} \left( A_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right. \\ &\quad \left. \pm |A_{i+1/2}|(w_{i+1}^n - w_i^n - A_{i+1/2}^{-1}S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i)) \right), \end{aligned} \quad (1.6.17)$$

donde  $A_{i+1/2} = A_\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n)$ ,  $B_{i+1/2} = B_\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n)$  y  $S_{i+1/2} = S_\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n)$ .

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} D_{i+1/2}^\pm(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) &= \frac{1}{2} \left( A_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right. \\ &\quad \left. \pm |A_{i+1/2}|(w_{i+1}^n - w_i^n) \pm \text{sgn}(A_{i+1/2})S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right), \end{aligned} \quad (1.6.18)$$

donde

$$\text{sgn}(A_{i+1/2}) = K_{i+1/2} \text{sgn}(L_{i+1/2}) K_{i+1/2}^{-1}, \quad (1.6.19)$$

siendo  $K_{i+1/2}$  la matriz de autovectores de  $A_{i+1/2}$  y  $L_{i+1/2}$  la matriz diagonal de sus autovalores.

Ahora usando (1.6.8), (1.6.9) y (1.6.10) podemos finalmente escribir

$$\begin{aligned} D_{i+1/2}^\pm(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) &= \frac{1}{2} \left( F(w_{i+1}^n) - F(w_i^n) + B_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right. \\ &\quad \left. \pm |A_{i+1/2}|(w_{i+1}^n - w_i^n) \pm \text{sgn}(A_{i+1/2})S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right). \end{aligned} \quad (1.6.20)$$

## 1.7. Resolvedores de Riemann tipo PVM

Los denominados métodos PVM (*Polynomial Viscosity Matrix*) definen una clase de esquemas camino-conservativos y fueron introducidos en [33], para leyes de equilibrio o, más generalmente, para sistemas hiperbólicos no conservativos. Estos esquemas tienen una expresión similar al método de Roe presentado anteriormente, pero en estos, la matriz de viscosidad numérica que caracteriza al esquema numérico se define formalmente en términos de una evaluación polinómica de una matriz de Roe. La principal ventaja de estos esquemas en comparación con el método Roe clásico es que la descomposición espectral de la matriz Roe no tiene porqué conocerse explícitamente, lo que puede conducir a una reducción significativa del costo computacional. Los métodos PVM pueden interpretarse como una generalización de los introducidos por Degond et al. en [46] para sistemas de conservación y leyes de equilibrio. Algunos métodos bien conocidos como Rusanov, Lax-Friedrichs, FORCE (ver [31, 129]), GFORCE (ver [31, 130]) o HLL (ver [70]) pueden interpretarse como métodos de PVM.

Consideremos el esquema de Roe definido en la sección anterior

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( D_{i-1/2}^+(w_{i-1}^n, w_i^n, \sigma_{i-1}, \sigma_i) + D_{i+1/2}^-(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) \right) \quad (1.7.1)$$

donde

$$D_{i+1/2}^\pm(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( F(w_{i+1}^n) - F(w_i^n) + B_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right. \\ \left. \pm |A_{i+1/2}|(w_{i+1}^n - w_i^n - A_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i)) \right), \quad (1.7.2)$$

con  $B_{i+1/2} = B_\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n)$ ,  $S_{i+1/2} = S_\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n)$  y  $A_{i+1/2} = A_\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n)$ .

Esta expresión del esquema de Roe sugiere la siguiente generalización

$$D_{i+1/2}^\pm(w_i^n, w_{i+1}^n, \sigma_i, \sigma_{i+1}) = \frac{1}{2} \left( F(w_{i+1}^n) - F(w_i^n) + B_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n) - S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right. \\ \left. \pm Q_{i+1/2}(w_{i+1}^n - w_i^n - A_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i)) \right), \quad (1.7.3)$$

donde  $Q_{i+1/2} = Q_\Phi(w_i^n, w_{i+1}^n)$  es una matriz de viscosidad numérica a precisar.

A partir de aquí, podemos obtener distintos esquemas numéricos en función de la matriz de viscosidad elegida. Por ejemplo, el esquema de Roe se deduce tomando la matriz de viscosidad

$$Q_\Phi(W_i, W_{i+1}) = |A_\Phi(W_i, W_{i+1})| \quad (1.7.4)$$

El esquema de Lax-Friedrichs corresponde a la elección

$$Q_\Phi(W_i, W_{i+1}) = \frac{\Delta x}{\Delta t} Id \quad (1.7.5)$$

donde  $Id$  es la matriz identidad. También los esquemas FORCE y GFORCE (ver [31, 129, 130]) se deducen de tomar las matrices

$$Q_\Phi(W_i, W_{i+1}) = (1 - \omega) \frac{\Delta x}{\Delta t} Id + \omega \frac{\Delta x}{\Delta t} A_\Phi^2(W_i, W_{i+1}) \quad (1.7.6)$$

con  $\omega = 0.5$  y  $\omega = \frac{1}{1 + \gamma}$  respectivamente, siendo  $\gamma$  el parámetro CFL que se describe en (1.7.12).

Nótese que en la definición (1.7.3), el término

$$C = Q_{i+1/2} A_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2} (\sigma_{i+1} - \sigma_i)$$

que puede interpretarse como la parte *upwinding* de la discretización del término fuente, no tiene sentido si uno de los autovalores de  $A_{i+1/2}$  se anula. En este caso, dos autovalores de  $\mathcal{A}_\Phi(W_i^n, W_{i+1}^n)$  se anulan y el problema se dice que es *resonante*. Los problemas resonantes exhiben una dificultad adicional, y en muchos casos no hay unicidad de solución débil, por lo que las soluciones numéricas pueden depender tanto de la familia de caminos como del esquema numérico. Este problema queda fuera del ámbito de esta tesis, ya que aquí usaremos la estrategia descrita en [31] que permite eliminar formalmente esta dificultad.

Nos centraremos en la definición de la matriz de viscosidad  $Q_\Phi(W_i, W_{i+1})$ . En particular, en [33] se propone definir las matrices  $Q_\Phi$  mediante la evaluación polinómica de una matriz de Roe  $A_\Phi(W_i, W_{i+1})$ :

$$Q_{i+1/2} = P_l^{i+1/2}(A_{i+1/2}) \quad (1.7.7)$$

siendo  $P_l^{i+1/2}(x)$  un polinomio de grado  $l$ ,

$$P_l^{i+1/2}(x) = \sum_{j=0}^l \alpha_j^{i+1/2} x^j \quad (1.7.8)$$

cuyos coeficientes  $\alpha_j^{i+1/2}$  deben satisfacer algunas condiciones, a precisar, para que el esquema resultante sea estable.

A partir de (1.7.7) y usando (1.6.8)-(1.6.9), podemos escribir

$$\begin{aligned} D_{i+1/2}^\pm &= \frac{\pm \alpha_0^{i+1/2}}{2} \left( \omega_{i+1} - \omega_i - A_{i+1/2}^{-1} S_{i+1/2} (\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^l \frac{\delta_{j,1} \pm \alpha_i^{i+1/2}}{2} A_{i+1/2}^{(j-1)} \left( F(\omega_{i+1}) - F(\omega_i) + B_{i+1/2}(\omega_{i+1} - \omega_i) - S_{i+1/2}(\sigma_{i+1} - \sigma_i) \right) \end{aligned} \quad (1.7.9)$$

donde

$$\delta_{j,1} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En general, la definición del polinomio  $P_l^{i+1/2}(x)$  estará relacionada con la estabilidad y la difusión numérica del método. Se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 1.7.1.** *Una condición suficiente para asegurar que el esquema numérico (1.7.1), (1.7.3) y (1.7.7) es  $L^\infty$ -estable es que*

$$\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq P_l^{i+1/2}(x) \geq |x| \quad \forall x \in [\lambda_{1,i+1/2}, \dots, \lambda_{m,i+1/2}], \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (1.7.10)$$

**Demostración.-** Efectivamente, para problemas lineales donde  $A_{i+1/2} = A$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , los esquemas definidos en (1.7.1), (1.7.3) y (1.7.7) se pueden reescribir así, (basta agrupar términos):

$$\begin{aligned} w_i^{n+1} = & \left( Id - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{P_l(A) + P_l(A)}{2} \right) w_i^n \\ & - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{P_l(A) - A}{2} \right) w_{i-1}^n \\ & + \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{P_l(A) - A}{2} \right) w_{i+1}^n. \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

Por un lado, la condición  $P_l(x) \geq |x|$  para todo  $x \in [\lambda_1, \dots, \lambda_m]$  implica que

$$[K^{-1}(P_l(A) - A)K]_{jj} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m,$$

siendo  $K$  la matriz de autovectores de  $A$ .

Por otro lado, la condición  $P_l(x) \leq \gamma \frac{\Delta t}{\Delta x}$  implica que

$$[K^{-1}(Id - \frac{\Delta t}{\Delta x} P_l(A))K]_{jj} \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Por tanto, la condición (1.7.10) implica que el esquema numérico es linealmente  $L^\infty$ -estable bajo la condición CFL usual

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_i |\lambda_i| = \gamma \leq 1. \quad (1.7.12)$$

■

**Observación 1.7.1.** La condición 1.7.10 puede reemplazarse por

$$\gamma \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq P_l^{i+1/2}(\lambda_{k,i+1/2}) \geq |\lambda_{k,i+1/2}|, \quad k = 1, \dots, m, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (1.7.13)$$

y el resultado sigue siendo válido.



Consideremos la siguiente notación: denotaremos por  $\text{PVM-}l(S_0, \dots, S_k)$  a un esquema numérico cuya matriz de viscosidad  $Q_{i+1/2}$  se define usando un polinomio de grado  $l$  cuyos coeficientes dependen de los parámetros  $S_0, \dots, S_k$ . En la práctica, los parámetros  $S_0, \dots, S_k$  están relacionados con las aproximaciones de algunas velocidades de propagación de ondas. Por ejemplo, el esquema de Lax-Friedrichs corresponde a  $\text{PVM-}0(S_0)$ , siendo  $S_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , donde  $\Delta t$  está relacionado con el máximo de velocidad de propagación de ondas mediante la condición CFL (1.7.12).

**Definición 1.7.1.** *Un método PVM se dice que es upwind si*

$$P_l^{i+1/2}(A_{i+1/2}) = \begin{cases} A_{i+1/2} & \text{si } \lambda_{1,i+1/2} > 0 \\ -A_{i+1/2} & \text{si } \lambda_{N,i+1/2} < 0, \end{cases} \quad (1.7.14)$$

y lo denotaremos como  $\text{PVM-}lU$ .

Por tanto, si

$$P_l^{i+1/2}(x) = \begin{cases} x & \text{si } \lambda_{1,i+1/2} > 0 \\ -x & \text{si } \lambda_{N,i+1/2} < 0, \end{cases} \quad (1.7.15)$$

el método PVM resultante es un método *upwind*.

**Observación 1.7.2.** Si  $\alpha_1 = 0$ , entonces el método PVM resultante no es un esquema *upwind*

A continuación nos detendremos en diferentes ejemplos de métodos clásicos reescritos como métodos de tipo PVM y prestaremos especial interés a los métodos HLL o  $\text{PVM-}1U(S_L, S_R)$  e IFCP o  $\text{PVM-}2U(S_L, S_R, S_{\text{int}})$ , objeto de estudio en los artículos que conforman esta tesis.

En lo que sigue, y para simplificar la notación, eliminaremos la dependencia de  $i + 1/2$  de los polinomios y sus coeficientes. Esto es, notaremos  $P_l(x)$  en lugar de  $P_l^{i+1/2}$  y  $\alpha_j$  en lugar de  $\alpha_j^{i+1/2}$ .

### 1.7.1. PVM-(N-1)U( $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ ) o método de Roe.

Como ya se ha comentado anteriormente, el método de Roe corresponde a la elección

$$Q_{i+1/2} = |A_{i+1/2}|.$$

Para reescribir el método de Roe como un método PVM, imponemos

$$|A_{i+1/2}| = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j A_{i+1/2}^j,$$

donde  $\alpha_j$ , con  $j = 0, \dots, N-1$  son solución del siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_N & \lambda_N^2 & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_1| \\ |\lambda_2| \\ \vdots \\ |\lambda_N| \end{pmatrix}, \quad (1.7.16)$$

donde  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  son los autovalores de la matriz  $A_{i+1/2}$ .

Notamos que (1.7.16) tiene una única solución, ya que es una matriz de VanderMonde, y los autovalores  $\lambda_j$  son todos distintos. Por tanto, el método de Roe puede reescribirse como un método de tipo PVM donde  $Q_{i+1/2} = P_{N-1}(A_{i+1/2})$ , siendo  $P_{N-1}(x)$  el polinomio cuyos coeficientes se definen en (1.7.16).

### 1.7.2. PVM-1U( $S_L$ , $S_R$ ) o método HLL

Consideremos ahora un método PVM definido usando un polinomio de grado 1, (véase Figura 1.3)

$$P_1(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x. \quad (1.7.17)$$

Para definir los coeficientes  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$ , consideremos  $P_1(S_L) = |S_L|$  y  $P_1(S_R) = |S_R|$ , donde  $S_L$  y  $S_R$  son aproximaciones del mínimo y máximo, respectivamente, de la velocidad de propagación de las ondas. Una posibilidad es tomar  $S_L = \lambda_{1,i+1/2}$ ,  $S_R = \lambda_{N,i+1/2}$ , aunque también podría usarse la que propone Davis en [45]:

$$S_L = \min(\lambda_{1,i+1/2}, \lambda_{1,i}), \quad S_R = \max(\lambda_{N,i+1/2}, \lambda_{N,i}), \quad (1.7.18)$$

siendo  $\lambda_{1,i} < \dots < \lambda_{N,i}$  los autovalores de la matriz  $A_\Phi(W_i, W_{i+1})$  Finalmente, podemos escribir las condiciones sobre  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  de la siguiente manera:

$$\alpha_0 = \frac{S_R |S_L| - S_L |S_R|}{S_R - S_L}, \quad \alpha_1 = \frac{|S_R| - |S_L|}{S_R - S_L}. \quad (1.7.19)$$

**Observación 1.7.3.** Nótese que si  $S_L > 0$ , entonces  $P_1(x) = x$ , y si  $S_R < 0$ , entonces  $P_1(x) = -x$ , concluyendo que el método es *upwind*.

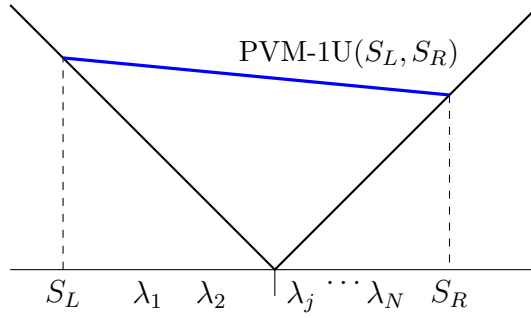


Figura 1.3: Gráficas del polinomio asociado a  $PVM-1U(S_L, S_R)$

**Observación 1.7.4.** Si el sistema (1.1.2) es conservativo ( $B = 0$ , y  $S = 0$ ), entonces el flujo conservativo  $G_{i+1/2} = D_{i+1/2}^- + F(\omega_i)$ , donde  $D_{i+1/2}^-$  viene dado por (1.7.9), usando  $Q_{i+1/2} = P_1(J(\omega_i, \omega_{i+1}))$ , siendo  $J(\omega_i, \omega_{i+1})$  una matriz de Roe para el flujo  $F(\omega)$ , coincide con el método HLL. Efectivamente, usando la expresión propuesta para  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$  tenemos que

$$G_{i+1/2} = \left( F(\omega_i)(S_R + |S_R| - S_L - |S_L|) + F(\omega_{i+1})(S_R + |S_R| - S_L - |S_L|) - (S_R|S_L| - S_L|S_R|)(\omega_{i+1} - \omega_i) \right) / (2S_R - 2S_L)$$

que es una versión compacta del flujo numérico HLL (ver [70]).

Así, el esquema HLL usual coincide con  $PVM-1U(S_L, S_R)$  en el caso de un sistema conservativo y, por tanto,  $PVM-1U(S_L, S_R)$  proporciona una generalización natural del método HLL para problemas no conservativos. Nótese que  $PVM-1U(S_L, S_R)$  es un esquema upwind en el sentido de la definición 1.7.1.

### 1.7.3. PVM-2U( $S_L, S_R, S_{\text{int}}$ ) o Método IFCP

El esquema IFCP fue introducido en [51] para la resolución numérica del sistema de aguas somera bicapa. Recordemos que la matriz de viscosidad asociada al esquema IFCP corresponde a la evaluación polinómica de la matriz de Roe

$$Q_{i+1/2} = P_2(A_{i+1/2}), \quad (1.7.20)$$

donde  $P_2(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$  es un polinomio de grado 2 cuyos coeficientes  $\alpha_l$ ,  $l = 0, 1, 2$  son solución del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_m & \lambda_m^2 \\ 1 & \chi_{\text{int}} & \chi_{\text{int}}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda_1| \\ |\lambda_m| \\ |\chi_{\text{int}}| \end{pmatrix} \quad (1.7.21)$$

donde

$$\chi_{\text{int}} = \sigma_{\text{ext}} \cdot \max(|\lambda_2|, \dots, |\lambda_{m-1}|)$$

y

$$\sigma_{\text{ext}} = \begin{cases} \text{sgn}(\lambda_1 + \lambda_m) & \text{si } (\lambda_1 + \lambda_m) \neq 0, \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior, obtenemos

$$\alpha_0 = \delta_1 \lambda_m \chi_{\text{int}} + \delta_m \lambda_1 \chi_{\text{int}} + \delta_{\text{int}} \lambda_1 \lambda_m, \quad (1.7.22)$$

$$\alpha_1 = -\lambda_1(\delta_m + \delta_{\text{int}}) - \lambda_m(\delta_1 + \delta_{\text{int}}) - \chi_{\text{int}}(\delta_1 + \delta_m), \quad (1.7.23)$$

$$\alpha_2 = \delta_1 + \delta_m + \delta_{\text{int}}, \quad (1.7.24)$$

donde

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{|\lambda_1|}{(\lambda_1 - \lambda_m)(\lambda_1 - \chi_{\text{int}})}, \\ \delta_m &= \frac{|\lambda_m|}{(\lambda_1 - \lambda_m)(\chi_{\text{int}} - \lambda_m)}, \\ \delta_{\text{int}} &= \frac{|\chi_{\text{int}}|}{(\chi_{\text{int}} - \lambda_1)(\chi_{\text{int}} - \lambda_m)}. \end{aligned} \quad (1.7.25)$$

En [51] se mostraba el que esquema IFCP es  $L^\infty$ -estable bajo la condición CFL usual cuando se aplicaba al sistema de aguas someras, pero no se probaba la estabilidad del mismo cuando este esquema se extiende a cualquier otro sistema hiperbólico. A continuación probamos que este resultado sigue siendo cierto.

**Teorema 1.7.1.** *El esquema IFCP es linealmente  $L^\infty$ -estable bajo la condición CFL usual.*

**Demostración.-** En primer lugar notemos que  $Q_{i+1/2}$  tiene los mismos autovectores que  $A_{i+1/2}$ , y que si  $\lambda_l$  es un autovalor de  $A_{i+1/2}$  entonces  $P_2^{i+1/2}(\lambda_l)$  es un autovalor de  $Q_{i+1/2}$ .

Denotemos por  $\lambda_{Q,j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , los autovalores de la matriz  $Q_{i+1/2}$ , entonces, se tiene que

$$\lambda_{Q,j} = P_2(\lambda_j) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_j + \alpha_2 \lambda_j^2, \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.7.26)$$

Probemos que  $\lambda_{Q,j} \geq |\lambda_j|$ . Por construcción, esto se cumple para  $j = 1$  y  $j = m$ , así que demostraremos que  $\lambda_{Q,j} \geq |\lambda_j|$ , para  $j = 2, \dots, m-1$ . Obsérvese que  $\lambda_1 < \chi_{\text{int}} < \lambda_m$  por construcción de  $\chi_{\text{int}}$ .

- Supongamos en primer lugar, que  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ , luego  $0 \leq \lambda_1 < \chi_{\text{int}} < \lambda_m$ . En tal caso, el polinomio  $P_2(\lambda)$  es una parábola que pasa por los puntos  $(\lambda_1, \lambda_1)$ ,  $(\chi_{\text{int}}, \chi_{\text{int}})$  y  $(\lambda_m, \lambda_m)$ . Por tanto se tiene  $P_2(\lambda) = \lambda$ , lo que prueba el resultado.

- El caso  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m \leq 0$  es análogo y se tiene  $P_2(\lambda) = -\lambda$ , lo que prueba el resultado.
- Supongamos ahora que  $\lambda_1 < 0$  y  $\lambda_m > 0$ .

El caso  $\chi_{\text{int}} = 0$  es trivial ya que si  $\chi_{\text{int}} = 0$ , implica que  $\lambda_2 = \dots = \lambda_{m-1} = 0$  y  $P_2(\lambda)$  es la parábola que pasa por los puntos  $(\lambda_1, \lambda_1)$ ,  $(0, 0)$  y  $(\lambda_m, \lambda_m)$ . Por tanto  $P_2(\lambda_j) = |\lambda_j|$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Consideremos, pues, que  $\chi_{\text{int}} \neq 0$ .

- Supongamos que  $|\lambda_1| > |\lambda_m|$  (el otro caso es análogo). En tal caso, tenemos  $\chi_{\text{int}} < 0$ .

Vamos a probar que  $P_2(\lambda) \geq |\lambda|$  para todo  $\lambda \in [\chi_{\text{int}}, -\chi_{\text{int}}] \cap [\chi_{\text{int}}, \lambda_m]$ .

Analicemos en primer lugar el signo de  $\alpha_2$ . Para ello escribimos  $\alpha_2 = \beta\gamma_2$ , con

$$\beta = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_m)(\lambda_1 - \chi_{\text{int}})(\chi_{\text{int}} - \lambda_m)} \quad (1.7.27)$$

y

$$\gamma_2 = |\lambda_1|(\chi_{\text{int}} - \lambda_m) + |\chi_{\text{int}}|(\lambda_m - \lambda_1) + |\lambda_m|(\lambda_1 - \chi_{\text{int}}). \quad (1.7.28)$$

Es claro, por la definición de  $\chi_{\text{int}}$ , que  $\beta < 0$ .

Por otro lado, como  $\chi_{\text{int}} < 0$ , podemos escribir

$$\gamma_2 = \lambda_m(|\chi_{\text{int}}| - |\lambda_1|) + |\lambda_m|(\lambda_1 - \chi_{\text{int}}), \quad (1.7.29)$$

y nuevamente, haciendo uso de la definición de  $\chi_{\text{int}}$ , tenemos que  $\gamma_2 < 0$ . De donde concluimos que  $\alpha_2 > 0$ .

Estudiemos ahora el signo de  $\alpha_1$ . Del mismo modo que antes, escribimos  $\alpha_1 = -\beta\gamma_1$ , con

$$\gamma_1 = (|\lambda_1| - |\lambda_m|)(|\lambda_1| - |\chi_{\text{int}}|)(|\lambda_m| - |\chi_{\text{int}}|). \quad (1.7.30)$$

De nuevo, usando de la definición de  $\chi_{\text{int}}$ , tenemos que

$$\text{sgn}(\alpha_1) = \text{sgn}(\gamma_1) = \text{sgn}(|\lambda_m| - |\chi_{\text{int}}|). \quad (1.7.31)$$

Además,

$$P_2'(\chi_{\text{int}}) + 1 = \frac{2\lambda_m(\chi_{\text{int}} - \lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_m)(\chi_{\text{int}} - \lambda_m)}, \quad (1.7.32)$$

$$P_2'(\lambda_m) - 1 = \frac{-2\lambda_1\chi_{\text{int}} + 2\lambda_m^2}{(\lambda_1 - \lambda_m)(\chi_{\text{int}} - \lambda_m)}. \quad (1.7.33)$$

(a) Supongamos que  $|\lambda_m| \geq |\chi_{\text{int}}|$ , por tanto  $\alpha_1 \geq 0$ . Entonces, para  $\lambda \geq 0$ ,

$$P_2(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 \geq \alpha_0 - \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 = P_2(-\lambda).$$

Luego  $P_2(\lambda) \geq P_2(-\lambda)$  para todo  $\lambda \in [0, \chi_{\text{int}}]$ . Por tanto, es suficiente probar

$$P_2(\lambda) \geq -\lambda = |\lambda|, \quad \forall \lambda \in [\chi_{\text{int}}, 0].$$

Sea  $\lambda_v = \frac{-2\alpha_1}{\alpha_2} \leq 0$  el vértice de la parábola. Además,  $\lambda_v$  es el punto donde  $P_2(\lambda)$  alcanza su mínimo absoluto, ya que  $\alpha_2 > 0$ .

(a.1) Supongamos que  $\lambda_v \leq \chi_{\text{int}}$ . Como la parábola es creciente para todo  $\lambda \geq \lambda_v$ , entonces

$$P_2(\lambda) \geq P_2(\chi_{\text{int}}) = |\chi_{\text{int}}| \geq |\lambda|, \quad \forall \lambda \in [\chi_{\text{int}}, 0] \quad (\text{véase Figura 1.4}).$$

(a.2) Supongamos que  $\lambda_v > \chi_{\text{int}}$ . Como  $P_2(\chi_{\text{int}}) = -\chi_{\text{int}}$ ,  $P'_2(\lambda_v) = 0$  y usando (1.7.32), tenemos que  $P'_2(\chi_{\text{int}}) \geq -1$ , y se tiene que  $P_2(\lambda) \geq -\lambda \quad \forall \lambda \in [\chi_{\text{int}}, \lambda_v]$ .

Además,  $P_2(\lambda) \geq P_2(\lambda_v) \geq |\lambda_v| \geq |\lambda| \quad \forall \lambda \in [\lambda_v, 0]$ , ya que  $P_2(\lambda)$  es creciente  $\forall \lambda \geq \lambda_v$ .

Por tanto,  $P_2(\lambda) \geq -\lambda \quad \forall \lambda \in [\chi_{\text{int}}, 0]$  (véase Figura 1.5).

(b) Supongamos ahora que  $|\lambda_m| < |\chi_{\text{int}}|$ . Entonces  $\alpha_1 < 0$ , luego  $\lambda_v > 0$ .

(b.1) Supongamos que  $\lambda_v \geq \lambda_m$ . Por lo anterior,  $P_2(\lambda) \geq -\lambda \quad \forall \lambda \in [\chi_{\text{int}}, 0]$ .

Por otro lado, por ser  $P_2(\lambda)$  decreciente para todo  $\lambda \leq \lambda_v$ , se tiene que

$$P_2(\lambda) \geq P_2(\lambda_m) = \lambda_m \geq \lambda \quad \forall \lambda \in [0, \lambda_m] \quad (\text{véase Figura 1.6}).$$

(b.2) Supongamos que  $0 < \lambda_v < \lambda_m$ . Por lo anterior,  $P_2(\lambda) \geq -\lambda \quad \forall \lambda \in [\chi_{\text{int}}, 0]$ .

Usando ahora (1.7.33), tenemos  $P'_2(\lambda_m) \leq 1$ . Como además,  $P_2(\lambda_m) = \lambda_m$  y  $P'_2(\lambda_v) = 0$ , tenemos que  $P_2(\lambda) \geq \lambda \quad \forall \lambda \in [\lambda_v, \lambda_m]$ .

Por último,  $P_2(\lambda) \geq P_2(\lambda_v) \geq \lambda_v \geq \lambda \quad \forall \lambda \in [0, \lambda_v]$ , ya que  $P_2(\lambda)$  es decreciente  $\forall \lambda \leq \lambda_v$ . (véase Figura 1.7).

■

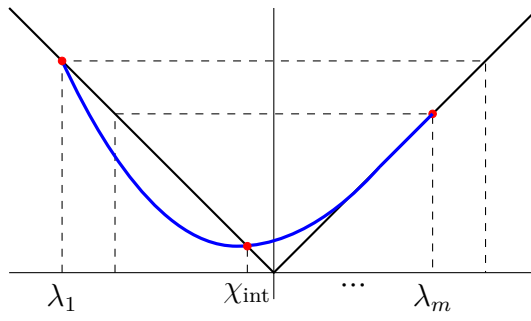


Figura 1.4: Situación de los autovalores. PVM-2U( $S_L, S_R, S_{\text{int}}$ ). Caso (a.1).

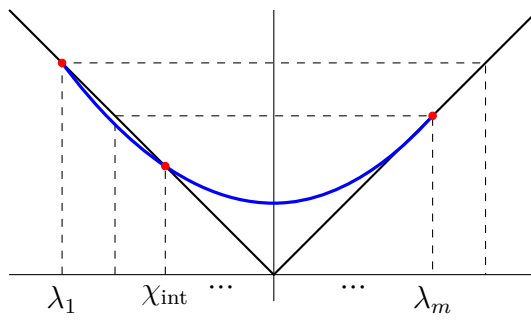


Figura 1.5: Situación de los autovalores. PVM-2U( $S_L, S_R, S_{\text{int}}$ ). Caso (a.2).

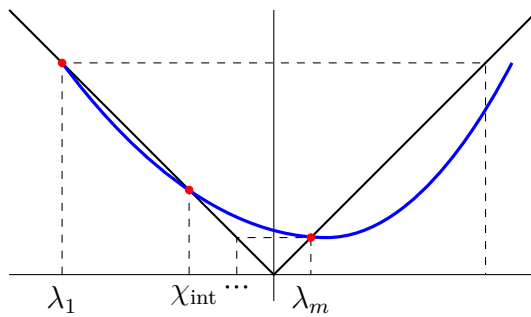


Figura 1.6: Situación de los autovalores. PVM-2U( $S_L, S_R, S_{\text{int}}$ ). Caso (b.1).

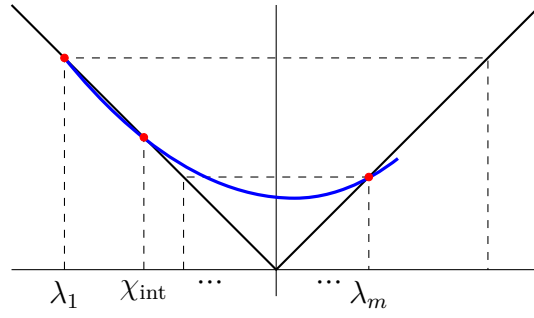


Figura 1.7: Situación de los autovalores. PVM-2U( $S_L, S_R, S_{\text{int}}$ ). Caso (b.2).

**Observación 1.7.5.** La construcción del esquema IFCP tiene sentido para  $m \geq 3$ , pero su definición se puede extender para  $1 \leq m \leq 2$ , aunque no es recomendable su uso en este caso, ya que puede resultar computacionalmente caro.

- $m = 1$ . Tenemos un sólo autovalor  $\lambda$ .

Consideramos  $\lambda_1 = |\lambda|$ ,  $\lambda_2 = -|\lambda|$  y  $\chi_{\text{int}} = 0$ .

- $m = 2$ . Tenemos dos autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

Si  $\lambda_1 < 0$  y  $\lambda_2 > 0$ , tomamos  $\chi_{\text{int}} = 0$ . En otro caso, podemos tomar un valor arbitrario  $\chi_{\text{int}}$  con  $\lambda_1 < \chi_{\text{int}} < \lambda_2$ .

## 1.8. Extensión a alto orden

En el caso de sistemas de leyes de conservación (1.2.1), es posible construir métodos de alto orden basados en la reconstrucción de estados mediante el siguiente procedimiento: Dado un esquema de primer orden con función de flujo numérico  $G(U, V)$ , consideramos un operador de reconstrucción de orden  $p$ , esto es, un operador que asocia a una sucesión dada  $\{W_i\}$  de valores en las celdas dos nuevas sucesiones  $\{W_{i+1/2}^-\}$ ,  $\{W_{i+1/2}^+\}$  de tal manera que, siempre que

$$W_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} W(x) dx, \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

para alguna función regular  $W_i$ , entonces:

$$W_{i+1/2}^\pm = W(x_{i+1/2}) + \mathcal{O}(\Delta x^p), \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

A continuación, usamos el método de líneas: discretizamos el sistema únicamente en espacio, y lo mantenemos continuo en tiempo. Obsérvese primero que, si denotamos por  $\bar{W}_i(t)$  al promedio en la celda  $I_i$  de una solución regular  $W$  de (1.2.1) en el instante  $t$ :

$$\bar{W}_i(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} W(x, t) dx,$$



integrando (1.2.1), se obtiene la siguiente ecuación para los promedios:

$$\overline{W}'_i(t) = \frac{1}{\Delta} (F(W(x_{i-1/2}, t)) - F(W(x_{i+1/2}, t))). \quad (1.8.1)$$

La idea es ahora aproximar esta ecuación utilizando al mismo tiempo el esquema de primer orden elegido y el operador de reconstrucción como sigue:

$$W'_i(t) = \frac{1}{\Delta x} (\mathcal{F}_{i-1/2} - \mathcal{F}_{i+1/2}), \quad (1.8.2)$$

con

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = \mathcal{F}(W_{i+1/2}^-(t), W_{i+1/2}^+(t)), \quad (1.8.3)$$

siendo  $W_i(t)$  la aproximación de  $\overline{W}_i(t)$  y  $\{W_{i+1/2}^\pm(t)\}$  las reconstrucciones a la sucesión  $\{W_i(t)\}$ . Puede probarse que (1.8.2)-(1.8.3) proporciona un método semidiscreto de orden  $p$  para (1.2.1). Nótese que (1.8.2) es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que puede ser resuelto con un método numérico estándar. En el contexto de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación es habitual el uso de métodos Runge-Kutta TVD (véase [64]).

Introduzcamos una interpretación de (1.8.2) en términos de medidas de Borel, como se hizo en la Sección 1.2, para facilitar la generalización al caso de sistemas no conservativos. Primero, obsérvese que (1.8.1) puede escribirse así:

$$\overline{W}'_i(t) = -\frac{1}{\Delta x} \langle [F(W(\cdot, t))]_x, 1_{I_i} \rangle. \quad (1.8.4)$$

A continuación, elegimos en cada celda  $I_i$  y en cada instante  $t > 0$  una función regular  $P_i^k$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_{i-1/2}^+} P_i^t(x) = W_{i-1/2}^+(t); \quad \lim_{x \rightarrow x_{i-1/2}^-} P_i^t(x) = W_{i+1/2}^-(t) \quad (1.8.5)$$

Consideramos ahora la aproximación de  $W(\cdot, t)$  dada por la función regular a trozos  $\mathcal{W}^t$  cuya restricción a  $I_i$  es  $P_i^t$ . Usando esta función, (1.8.4) puede aproximarse mediante

$$W'_i(t) = -\frac{1}{\Delta x} \langle [F(\mathcal{W}^t)]_x, 1_{I_i} \rangle. \quad (1.8.6)$$

Nótese que, en este caso,  $[F(\mathcal{W})_x]$  es la suma de una medida regular cuya derivada de Radon-Nykodym en la celda  $I_i$  es  $F(P'_i)_x$  y una medida singular:

$$\sum_i \left( F(W_{i+1/2}^+(t)) - F(W_{i+1/2}^-(t)) \right) \delta_{x=x_{i+1/2}}$$

Si, de nuevo, el flujo numérico del esquema de primer orden se emplea para separar las medidas de Dirac situadas en las interceldas:

$$\begin{aligned} \left( F(W_{i+1/2}^+(t)) - F(W_{i+1/2}^-(t)) \right) \delta_{x=x_{i+1/2}} = \\ \left( F(W_{i+1/2}^+(t)) - \mathcal{F}_{i+1/2} \right) \delta_{x=x_{i+1/2}} + \left( \mathcal{F}_{i+1/2} - F(W_{i+1/2}^-(t)) \right) \delta_{x=x_{i+1/2}}, \end{aligned}$$

y el primer y segundo sumandos se asignan respectivamente a las celdas  $I_{i+1}$  e  $I_i$ , obtenemos de (1.8.6):

$$W_i' = -\frac{1}{\Delta x} \left( F(W_{i-1/2}^+(t)) - \mathcal{F}_{i-1/2} + \mathcal{F}_{i+1/2} - F(W_{i+1/2}^-(t)) + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} F(P_i^t(x))_x dx \right), \quad (1.8.7)$$

que obviamente es equivalente a (1.8.2). Centrémonos ahora en el problema general (1.1.1). En este caso, la ecuación para los promedios en la celda es la siguiente:

$$W_i' = -\frac{1}{\Delta x} \langle [\mathcal{A}(W_i(t))W_i(t)]_\Phi, 1_{I_i} \rangle. \quad (1.8.8)$$

Siguiendo [103], [24], presentamos a continuación la escritura general de una aproximación semidiscreta de alto orden basada en un esquema de primer orden camino conservativo (1.3.9) con  $q = 0$  y  $p = 1$ , esto es,

$$\mathcal{D}_{i+1/2}^\pm = \mathcal{D}(W_i^n, W_{i+1}^n),$$

y un operador de reconstrucción de orden  $p$ . La extensión natural de (1.8.7) es:

$$W_i' = -\frac{1}{\Delta x} \left( \mathcal{D}_{i-1/2}^+ + \mathcal{D}_{i+1/2}^- + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathcal{A}(P_i^t(x)) \frac{dP_i^t}{dx}(x) dx \right), \quad (1.8.9)$$

con

$$\mathcal{D}_{i+1/2}^\pm = \mathcal{D}^\pm(W_{i+1/2}^-, W_{i+1/2}^+). \quad (1.8.10)$$

En (1.8.9) los términos integrales son aproximaciones de la parte regular de la descomposición de Lebesgue de  $[\mathcal{A}(W(\cdot, t))W_x(\cdot, t)]_\Phi$ , mientras que los términos  $\mathcal{D}_{i-1/2}^\pm$  corresponden a la parte singular.

Obsérvese que hay una diferencia importante entre los casos conservativo y no conservativo: mientras que en el caso conservativo el esquema numérico no depende explícitamente de las funciones  $P_i^t$  elegidas (sólo se tienen en cuenta los estados reconstruidos en las interceldas), esto no ocurre para sistemas no conservativos. En consecuencia, el orden del método es  $p$  en el primer caso y dependiente de la elección de las funciones  $P_i^t$  en el segundo.

En la práctica, la definición del operador de reconstrucción proporciona una elección natural de las funciones  $P_i^t$ . El procedimiento usual para definir un operador de reconstrucción es el siguiente: dada una sucesión  $\{W_i\}$  de valores en las celdas, la función aproximante en cada celda  $I_i$ ,  $P_i^t$ , se calcula usando los valores  $W_j$  en un *stencil*:

$$P_i(x; W_{i-l}, \dots, W_{i+r}),$$

siendo  $l, r$  dos números naturales prefijados. Las reconstrucciones  $W_{i+1/2}^\pm$  se obtienen tomando los límites de estas funciones en las interceldas. Estas funciones aproximantes se calculan generalmente utilizando técnicas de interpolación o aproximación. De aquí en adelante, supondremos que el operador de reconstrucción se ha construido siguiendo este procedimiento. Por tanto, la elección natural de  $P_i^t$  es:

$$P_i^t(x) = P_i(x; W_{i-l}(t), \dots, W_{i+r}(t)). \quad (1.8.11)$$

En la literatura se pueden encontrar distintos operadores de reconstrucción. En la práctica los más utilizados son: la reconstrucción tipo MUSCL [134], reconstrucciones ENO y WENO [79, 86, 124, 123], reconstrucción hiperbólica [88], etc. Se puede probar el siguiente resultado sobre el orden del método:

**Teorema 1.8.1.** *Supongamos que  $\mathcal{A}, \mathcal{D}^\pm$  son regulares y con derivadas acotadas. Supongamos también que el operador de reconstrucción es de orden  $p$  y que, dada una sucesión definida mediante*

$$W_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} W(x) dx$$

*para alguna función regular  $W$ , se verifican las siguientes propiedades:*

$$W_{i+1/2}^+ - W_{i+1/2}^- = \mathcal{O}(\Delta x^{p+1}),$$

$$P_i(x; W_{i-l}, \dots, W_{i+r}) = W(x) + \mathcal{O}(\Delta x^{s_1}), \quad \forall x \in I_i,$$

$$\frac{d}{dx} P_i(x; W_{i-l}, \dots, W_{i+r}) = W'(x) + \mathcal{O}(\Delta x^{s_2}), \quad \forall x \in I_i,$$

*Entonces, (1.8.9) es una aproximación del sistema (1.8.8) para soluciones regulares  $W$ , de orden al menos  $s = \min(p, s_1, s_2)$  en el sentido siguiente:*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \left( \mathcal{D}_{i-1/2}^+ + \mathcal{D}_{i+1/2}^- + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathcal{A}(P_i^t(x)) \frac{dP_i^t}{dx}(x) dx \right) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left( \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathcal{A}(W(x, t)) W_x(x, t) dx \right) + \mathcal{O}(\Delta x^s), \end{aligned} \quad (1.8.12)$$

*para cada solución  $W$  suficientemente regular, siendo  $\{W_{i-1/2}^\pm(t)\}$  las reconstrucciones correspondientes a la sucesión  $\{W_i(t)\}$  y  $P_i^t$  la función definida en (1.8.11).*

La prueba es idéntica a la del caso particular estudiado en [24], donde se presentaron métodos basados en una generalización de Roe.

**Observación 1.8.1.** Para las técnicas de reconstrucción usuales se suele tener  $s_2 \leq s_1 < p$  luego el orden teórico de (1.8.9) es  $s_2$  para sistemas no conservativos y  $p$  para sistemas de leyes de conservación. En consecuencia, puede perderse exactitud cuando se aplica una técnica de reconstrucción de orden  $p$  para leyes de conservación a un problema no conservativo. No obstante, esta cota de error es pesimista: en los ejemplos numéricos se suele medir un orden  $s_2 + 1$  para soluciones regulares. Por otra parte, en [97] se emplea una técnica para el cálculo de las integrales mediante el método de extrapolación de Richardson que garantiza el orden  $s_2 + 1$ .

Con el fin de obtener esquemas numéricos camino-conservativos de alto orden que sean bien equilibrados, será necesario considerar en primer lugar operadores de reconstrucción que sean bien equilibrados en el siguiente sentido:

**Definición 1.8.1.** Dada una solución regular de (1.1.1), se dice que un operador de reconstrucción es bien-equilibrado para  $W(x)$  si las funciones de aproximación  $P_i(x)$  asociadas a los valores promedio  $\{W_i\}$  son también soluciones estacionarias del sistema, es decir,

$$\mathcal{A}(P_i(x)) \frac{\delta P_i(x)}{\delta x}(x) = 0, \forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], i = 1, \dots, N.$$

**Teorema 1.8.2.** Sea  $\gamma \in \Gamma$ . Supongamos que el método camino-conservativo de primer orden y el operador de reconstrucción son exactamente bien equilibrados para  $\gamma$ . Entonces el esquema numérico (1.8.9) es también bien equilibrado para  $\gamma$ . Además, bajo estas hipótesis, el esquema (1.8.9) es también bien equilibrado con orden  $\alpha = \min(p, s_1, s_2)$ .

La construcción de operadores de reconstrucción bien equilibrados no es una tarea sencilla. En el caso del sistema de aguas someras mono o bicapa y para las soluciones de equilibrio correspondientes al agua en reposo esto no es difícil debido a la relación lineal entre las variables y la fuente en el equilibrio. En [27] y [37] se define un procedimiento general para la construcción de operadores de reconstrucción bien equilibrados.

## Capítulo 2

# Cuantificación de la incertidumbre

Se pueden considerar varios tipos de incertidumbre para sistemas de la forma (1.1.2): aleatoria y epistémica. La incertidumbre aleatoria (estadística) está presente cuando se obtienen resultados diferentes realizando repetidamente el mismo experimento, y la incertidumbre resultante no se puede suprimir mediante mediciones más precisas. Un buen ejemplo de esta incertidumbre son las inestabilidades de Kelvin-Helmholtz y Richtmyer-Meshkov, regidas por las ecuaciones de Euler. La inestabilidad de Kelvin-Helmholtz se produce cuando dos fluidos separados de diferentes densidades son acelerados impulsivamente en la dirección normal a la interfaz entre los dos fluidos. Es una de las inestabilidades más importantes que aparecen al considerar problemas de la mecánica de fluidos y exhibe varias de las complejidades no-lineales que transforman las simples condiciones iniciales en un complejo flujo turbulento. Está estrechamente relacionada con la inestabilidad de Rayleigh-Taylor, que se desarrolla cuando una interfaz plana es sometida a una aceleración constante, como la causada por el retraso de un fluido pesado sobre uno más ligero bajo el campo gravitatorio terrestre. En estos dos ejemplos, la solución generalmente no es única [52]; por lo tanto, solo las propiedades generales, como el valor esperado, podrían cuantificarse. La incertidumbre epistémica (sistemática) se debe a parámetros inciertos, es decir, cantidades que, en principio, podrían conocerse, sin embargo, los valores precisos podrían no estar disponibles en la práctica. Por ejemplo, los métodos numéricos existentes para aproximar (1.1.2) requieren los datos iniciales  $W_0$ , los datos de contorno, el término fuente  $S$  y las funciones de flujo  $F$  como entradas. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones prácticas, no es posible medir estos *inputs* con precisión. En esta tesis, consideramos solo la incertidumbre epistémica (sistemática) de los datos de entrada.

## 2.1. Modelado probabilístico de la incertidumbre

Para el modelado de la incertidumbre en los *inputs* y como consecuencia en las soluciones de EDPs se suele utilizar habitualmente la teoría de probabilidad de Kolmogorov, y esa es también nuestra elección en esta tesis. Como se sugiere en [111], la incertidumbre en los *inputs* de (1.1.2) se modelan mediante campos aleatorios con leyes de probabilidad establecidas, que resumimos a continuación.

Sea  $(\Sigma, \mathcal{F})$  un espacio medible, donde  $\Sigma$  denota al conjunto de todos los eventos elementales  $\xi \in \Sigma$ , y  $\mathcal{F}$  la  $\sigma$ -álgebra de todos los posibles eventos de nuestro modelo de probabilidad. Una medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  en  $(\Sigma, \mathcal{F})$  es una función  $\sigma$ -aditiva de  $\Sigma$  en  $[0, 1]$  tal que  $\mathbb{P}(\Sigma) = 1$  y el espacio de medida  $(\Sigma, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  se denomina espacio de probabilidad. Siempre asumiremos, a menos que se indique explícitamente, que  $(\Sigma, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  es completo. Denotando un segundo espacio medible por  $(E, \mathcal{G})$ , un campo aleatorio en  $E$  es cualquier aplicación  $X : \Sigma \rightarrow E$  tal que el conjunto  $\{\xi \in \Sigma : X(\xi) \in A\} = \{X \in A\} \in \mathcal{F}$  para cada  $A \in \mathcal{G}$ , es decir, tal que  $X$  sea una aplicación  $\mathcal{G}$ -medible de  $\Sigma$  en  $E$ . Denotemos  $\mathcal{L}(X)$  a la ley o distribución de  $X$  sobre  $\mathbb{P}$ ,

$$\mathcal{L}(X)(A) = \mathbb{P}(\{\xi \in \Sigma : X(\xi) \in A\}) \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

La medida  $\mu_X = \mathcal{L}(X)$  en  $(E, \mathcal{G})$  se denomina *ley* o *distribución* de  $X$ .

Supongamos ahora que  $E$  es un espacio Banach separable con norma  $\|\cdot\|_E$  y su dual  $E^*$ , entonces  $\mathcal{B}(E)$  es el menor  $\sigma$ -campo de subconjuntos de  $E$  que contiene a todos los conjuntos

$$\{x \in E : \varphi(x) \leq \alpha\}, \quad \varphi \in E^*, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, para un espacio separable Banach  $E$ ,  $X : \Sigma \rightarrow E$  es un campo aleatorio en  $E$  si y solo si para cada  $\varphi \in E^*$ ,  $\xi \mapsto \varphi(X(\xi)) \in \mathbb{R}$  es una variable aleatoria en  $\mathbb{R}$ .

**Definición 2.1.1** (Campo aleatorio). *Para un espacio de Banach separable  $E$ , un campo aleatorio en  $E$  es una aplicación  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(E))$ -medible de  $\Sigma$  en  $E$*

$$X : (\Sigma, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{B}(E)).$$

**Lema 2.1.1** (La norma de un campo aleatorio es una variable aleatoria). *Sea  $E$  un espacio de Banach separable y sea  $X : \Sigma \rightarrow E$  un campo aleatorio en  $E$  sobre  $(\Sigma, \mathcal{F})$ , entonces la aplicación  $\Sigma \ni \xi \mapsto \|X(\xi)\|_E \in \mathbb{R}$  es medible, es decir, es una variable aleatoria de  $(\Sigma, \mathcal{F})$  en  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .*

**Demostración.-** Como  $E$  es separable, existe una sucesión  $\{\varphi_n\} \in E^*$  tal que para todo  $x \in E$ ,

$$\|x\|_E = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(x)|$$

por lo que para todo  $\xi \in \Sigma$  se tiene que  $\|X(\xi)\|_E = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(X(\xi))|$ .  
 Por tanto  $\xi \mapsto \|X(\xi)\|_E$  es una variable aleatoria en  $\mathbb{R}$ . ■

El campo aleatorio  $X : \Sigma \rightarrow E$  se llama de Bochner integrable si, para cualquier medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  en el espacio medible  $(\Sigma, \mathcal{F})$ ,

$$\int_{\Sigma} \|X(\xi)\|_E d\mathbb{P}(\xi) < \infty.$$

Denotaremos por  $L^1(\Sigma, E) = L^1((\Sigma, \mathcal{F}, \mathbb{P}), E)$  al conjunto de todos los campos aleatorios en  $E$ , Bochner integrables y equipados con la norma

$$\|X\|_{L^1(\Sigma, E)} = \int_{\Sigma} \|X(\xi)\|_E d\mathbb{P}(\xi) = \mathbb{E}(\|X\|_E).$$

Tomando  $1 \leq p \leq \infty$ , definimos  $L^p(\Sigma, E) = L^p((\Sigma, \mathcal{F}, \mathbb{P}), E)$  al conjunto de todos los campos aleatorios Bochner  $p$ -integrables que toman valores en  $E$  equipados con la norma

$$\|X\|_{L^p(\Sigma, E)} := (\mathbb{E}(\|X\|_E^p))^{1/p}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Para  $p = \infty$ , denotaremos por  $L^\infty(\Sigma, E) = L^\infty((\Sigma, \mathcal{F}, \mathbb{P}), E)$  al conjunto de todos los campos aleatorios en  $E$  que son funciones Bochner integrables esencialmente acotadas, y equipados con la norma

$$\|X\|_{L^\infty(\Sigma, E)} := \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \Sigma} \|X(\xi)\|_E.$$

### 2.1.1. Esperanza de un campo aleatorio

Definiremos la esperanza matemática  $\mathbb{E}[X]$  de un campo aleatorio integrable  $X \in L^1(\Sigma, E)$ .

Un campo aleatorio  $X$  tomando valores en  $E$  se denomina *simple* si solo puede tomar un número finito de valores, es decir, si se escribe de forma explícita (siendo  $\chi_A$  la función característica de  $A \in \mathcal{F}$ ) como

$$X = \sum_{i=1}^N x_i \chi_{A_i}, \quad A_i \in \mathcal{F}, x_i \in E, N < \infty$$

Establecemos, para campos aleatorios simples  $X$  que toman valores en  $E$  y para cada  $B \in \mathcal{F}$ ,

$$\int_{\Sigma} X(\Sigma) d\mathbb{P}(\xi) = \int_B X d\mathbb{P} := \sum_{i=1}^N x_i \mathbb{P}(A_i \cap B).$$

Por densidad, para cada  $X(\cdot)$ , y cada  $B \in \mathcal{F}$ ,

$$\left\| \int_B X(\Sigma) d\mathbb{P}(\xi) \right\|_E \leq \int_B \|X(\Sigma)\|_E d\mathbb{P}(\xi).$$

Para cada variable aleatoria  $X : \xi \rightarrow E$  que sea Bochner integrable, existe una sucesión  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de variables aleatorias simples tales que, para todo  $\xi \in \Sigma$ ,  $\|X(\Sigma) - X_n(\Sigma)\|_E \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por tanto, lo anterior se extiende por continuidad a toda variable aleatoria que tome valores en  $E$ .

**Definición 2.1.2** (Esperanza de un campo aleatorio). *Para un campo aleatorio que tome valores en  $E$  y Bochner integrable  $X \in L^1(\Sigma, E)$ , la esperanza  $\mathbb{E}[X]$  de  $X$  es un elemento de  $E$ ,*

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\xi} X(\Sigma) d\mathbb{P}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\xi} X_n(\Sigma) d\mathbb{P}(\xi) \in E. \quad (2.1.1)$$

### 2.1.2. Momentos de orden superior

Para  $k \in \mathbb{N}$  y un espacio de Banach separable  $E$ , siguiendo [89], denotamos por  $\mathbb{E}^{(k)} = E \otimes \cdots \otimes E$  al espacio Banach del  $k$ -producto tensorial de  $k$  copias de  $E$ , equipado con una norma cruzada, es decir

$$\|X_1 \otimes \cdots \otimes X_k\|_E^{(k)} = \|X_1\|_E \cdots \|X_k\|_E, \quad \forall X_1, \dots, X_k \in E. \quad (2.1.2)$$

Para  $k \in \mathbb{N}$  y para un campo aleatorio  $k$ -integrable Bochner que tome valores en  $E$ ,  $X \in L^k(\Sigma, E)$ , consideramos el campo aleatorio  $X^{(k)}$ , definido por  $k$  copias de  $X$ ,  $X(\xi) \otimes \cdots \otimes X(\xi)$ . Entonces

$$X^{(k)} := X \otimes \cdots \otimes X \in L^1(\Sigma, E^{(k)}), \quad (2.1.3)$$

y, por la definición de la norma del producto tensorial,

$$\|X^{(k)}\|_{L^1(\Sigma, E^{(k)})} = \int_{\Sigma} \|X(\xi)\|_E^k d\mathbb{P}(\xi) = \|X_{L^k(\Sigma, E)}\|^k < \infty. \quad (2.1.4)$$

**Definición 2.1.3** ( $k$ -momento). *El momento de orden  $k$  de  $X \in L^k(\Sigma, E)$  es un elemento de  $E^{(k)}$ ,*

$$\mathcal{M}^k[X] := \mathbb{E}[X^{(k)}] \in E^{(k)}. \quad (2.1.5)$$

Se define además la varianza  $\mathbb{V}[X] \in E$  de un campo aleatorio  $X \in L^2(E)$  como la traza del momento central de segundo orden  $\mathcal{M}^2[X] \in E^{(2)}$ , bien definido según la definición 2.1.3,

$$\mathbb{V}[X] = \text{traza}(\mathcal{M}^2[X - \mathbb{E}[X]]) = \mathbb{E}[XX] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] \in E. \quad (2.1.6)$$

Para campos aleatorios en  $E$  que dependen del tiempo,  $X \in L^k(\Sigma, C([0, t], E))$ , la definición anterior 2.1.3 se puede extender a los momentos de orden  $k$ ,  $\mathcal{M}^k[X](t_1, \dots, t - k)$ . Véase [89].



## 2.2. Cuantificación de la incertidumbre

Los *inputs* de la ecuación (1.1.2) son inciertos y esta incertidumbre se propaga a la solución. El modelado y la aproximación de la propagación de la incertidumbre en la solución debido a la incertidumbre en los *inputs* constituye el tema de la cuantificación de la incertidumbre, en adelante UQ (*uncertainty quantification*). La solución de leyes de conservación (1.1.2) con incertidumbre en los parámetros también puede interpretarse como un campo aleatorio y los momentos estadísticos de la solución como la esperanza y la varianza son las medidas de interés.

No es nada trivial desarrollar algoritmos eficientes para cuantificar la incertidumbre en leyes de conservación con incertidumbre en los parámetros de entrada. El mayor desafío radica en el hecho de que las discontinuidades en el espacio físico (que inevitablemente surgen en soluciones de leyes de conservación hiperbólicas no lineales) pueden propagarse en representaciones de las densidades de probabilidad de las soluciones aleatorias. Un método numérico robusto debería ser capaz de lidiar con estas discontinuidades. Otro desafío radica en tratar con el hecho de que el número de fuentes aleatorias que impulsan la incertidumbre puede ser muy grande.

El diseño de esquemas numéricos eficientes para cuantificar la incertidumbre en soluciones de ecuaciones en derivadas parciales ha tenido mucha actividad en los últimos años.

Una clase de métodos para la cuantificación de incertidumbre computacional en soluciones numéricas de EDPs son métodos de muestreo estadísticos. Estas técnicas permiten incorporar el carácter estocástico de ciertos parámetros a modelos deterministas: la idea consiste en tomar una muestra estadística representativa de los parámetros que se consideren, realizar un cálculo determinista para cada uno de los valores de la muestra y, finalmente calcular la esperanza y momentos de las predicciones obtenidas.

Consideremos el espacio de probabilidad completo  $(\Sigma, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , y sea  $\omega(t, x, \xi)$ ,  $\xi \in \Sigma$  la solución del sistema (1.1.2).

## 2.3. Método de volúmenes finitos Monte Carlo

A continuación, definimos y analizamos el esquema MC-FVM. Se basa en la idea directa de generar, posiblemente en paralelo, muestras independientes de los datos de entrada  $\xi$  y luego, para cada muestra  $\xi^i$  de los datos de entrada aleatoria, realizar una simulación del método de volúmenes finitos.

**Definición 2.3.1** (MC-FVM). *El método de volúmenes finitos Monte Carlo (MC-FVM) consiste en los siguientes pasos:*

1. **Muestreo:** *Se consideran  $M$  muestras  $\xi^k, k = 1, \dots, M$  independientes e idénticamente distribuidas del campo aleatorio. Denotemos la aproximación resultante de cada uno de estas muestras como  $\xi_{\mathcal{T}}^i$  en la malla  $\mathcal{T}$ .*
2. **Resolución:** *Para cada uno de los parámetros  $\xi^k$ , se resuelve numéricamente el sistema subyacente mediante el método de volúmenes finitos sobre la malla  $\mathcal{T}$  con  $\Delta x = \Delta x(\mathcal{T})$  en el tiempo  $T = t^n$ . Denotemos la solución por  $w_{\mathcal{T}}^{i,n}(x)$ .*
3. **Estimación de los estadísticos:** *Estimamos la esperanza*

$$\mathbb{E}[\omega(\cdot, t, \xi)] = \mathcal{M}^1[\omega(\cdot, t, \xi)]$$

*del campo aleatorio de la solución  $\omega(\cdot, t, \xi)$  en el tiempo  $t = t^n$  mediante el cálculo de la media de las soluciones aproximadas.*

$$E_M[\omega_{\mathcal{T}}^n] = E_M[\omega_{\mathcal{T}}^n(\cdot)] := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \omega_{\mathcal{T}}^{i,n}(\cdot). \quad (2.3.1)$$

*Para  $k \geq 2$ , el momento de orden  $k$*

$$M^k[\omega(\cdot, t)] = \mathbb{E}[\omega(\cdot, t)^{(k)}]$$

*definido en (2.1.3) lo estimamos por*

$$E_M^{(k)}[\omega_{\mathcal{T}}^{(k)}] = E_M^{(k)}[\omega_{\mathcal{T}}^n(\cdot)] := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \underbrace{(\omega_{\mathcal{T}}(\cdot)^{i,n} \otimes \dots \otimes \omega_{\mathcal{T}}^{i,n}(\cdot))}_{k \text{ veces}} \quad (2.3.2)$$

*De manera general, dados los instantes temporales  $t_1, \dots, t_n \in [0, T], T < \infty$ , la estimación del momento  $\mathcal{M}^k[\omega](t_1, \dots, t_k)$  se define por*

$$E_M^{(k)}[\omega_{\mathcal{T}}](t_1, \dots, t_k) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \underbrace{(\omega_{\mathcal{T}}(\cdot, t_1) \otimes \dots \otimes \omega_{\mathcal{T}}(\cdot, t_k))}_{k \text{ veces}} \quad (2.3.3)$$

El algoritmo anterior es bastante simple de implementar. Remarcamos que el paso 1 requiere un generador de números (pseudo) aleatorios (*pseudo random number generator*, PRNG). En este trabajo utilizaremos el Mersenne Twister PRNG [95], que tiene un período de  $2^{19937} - 1$ . En el paso 2, se puede usar cualquier esquema de volumen finito estándar (alto orden). Además, la única interacción (de datos) entre diferentes muestras está en el paso 3 cuando se calculan los promedios del conjunto. Por lo tanto, el MC no sólo es no intrusivo sino también fácilmente paralelizable.

Tomando como base la experiencia numérica en la resolución mediante MC-FVM de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación no lineales con datos iniciales aleatorios (ver [89, 90]), postulamos que se tiene la siguiente estimación si la solución tiene momentos de orden 2 finitos.

$$\|E[\omega(\cdot, t^n)] - E_M[\omega_T^n]\|_{L^2(\Sigma; L^1(D))} \leq C_{\text{stat}} M^{-1/2} + C_{\text{st}} \Delta x^s \quad (2.3.4)$$

Aquí, la norma  $L^2(\Sigma; L^1(D))$  de una función aleatoria  $f(\cdot, \xi)$  se define como

$$\|f\|_{L^2(\Sigma; L^1(D))} := \left( \int_{\xi} \|f(\cdot, \xi)\|_{L^1(D)}^2 d\mathbb{P}(\xi) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3.5)$$

donde  $C_{\text{stat}}$ ,  $C_{\text{st}}$  son constantes que dependen del dominio  $D$ , la condición inicial, los datos, horizonte temporal  $T$  y las estadísticas de diferentes parámetros aleatorios, en particular, de la media y varianza. Asumiremos que el esquema de volumen finito subyacente converge a las soluciones de los sistemas deterministas objetos de estudio en esta tesis, con un ratio  $s > 0$ . Además, en (2.3.4) y en adelante, asumiremos como se hace de manera habitual en los métodos MC, que los ensayos  $\omega_T^{k,n}$  de (2.3.2), como funciones aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con la misma ley que  $\omega$ . Basado en el análisis de error de [90], tenemos que elegir

$$M = \mathcal{O}(\Delta x^{-2s}) \quad (2.3.6)$$

para equilibrar el error estadístico con el error espacio-temporal en (2.3.4). En consecuencia, es sencillo deducir que el error asintótico frente a la estimación (computacional) del trabajo viene dado por

$$\|E[\omega(\cdot, t^n)] - E_M[\omega_T^n]\|_{L^2(\Sigma; L^1(D))} \leq \text{Work}^{\frac{-s}{d+1+2s}} \quad (2.3.7)$$

donde  $d$  es la dimensión del espacio (en este trabajo,  $d = 1$  o  $d = 2$ ). El error anterior frente a la estimación del trabajo es considerablemente más costoso en comparación con el error determinista del método de volúmenes finitos que se equipara con  $\text{Work}^{-s/(d+1)}$ . Vemos que en la situación en que el ratio de convergencia  $s$  y la dimensión son bajos, se obtiene una tasa de convergencia considerablemente reducida de MC-FVM, en términos de precisión frente a trabajo. Por otro lado, para los esquemas de orden superior (donde  $s \gg d + 1$ ) domina el error MC y obtenemos la tasa  $1/2$  en términos de esfuerzo computacional, que es lo habitual en los métodos MC. En [90] se ofrece una extensa discusión sobre los resultados del análisis del error frente el trabajo computacional.

## 2.4. Método de volúmenes finitos Monte Carlo Multinivel

Dada la lenta convergencia del método MC-FVM, discutido en [89, 90], proponemos aquí el Método de volúmenes finitos Monte Carlo Multinivel MLMC-FVM. La idea clave en el esquema Monte Carlo multinivel de volúmenes finitos es el muestreo simultáneo de tipo MC en diferentes niveles de resolución, con diferentes números de muestras tomadas en cada uno de los  $M_l$  niveles.

**Definición 2.4.1** (MLMC-FVM). *El algoritmo del método Monte Carlo multinivel de volúmenes finitos consiste en los siguientes pasos:*

1. **Mallas encajadas:** Consideremos una sucesión de mallas encajadas  $\{\mathcal{T}_l\}_{l=0}^{\infty}$  del dominio espacial  $D$  con diámetros de malla  $\Delta x_l$  tales que

$$\Delta x_l = \sup\{|V_i| : V_i \in \mathcal{T}_l\} = \mathcal{O}(2^{-l} \Delta x_0), \quad l \in \mathbb{N}_0$$

donde  $\Delta x_0$  es el diámetro de la malla para la resolución más gruesa y corresponde al nivel más bajo  $l = 0$ .

2. **Muestreo:** Para cada nivel de resolución  $l \in \mathbb{N}_0$ , tomamos  $M_l$  muestras  $\xi_l^k$ ,  $k = 1, \dots, M_l$  independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) pertenecientes al conjunto de parámetros admisibles para el modelo.
3. **Resolución:** Para cada nivel de resolución y cada muestra  $\xi_l^k$  se resuelve el sistema resultante en la malla  $\mathcal{T}_l$ . Denotemos las soluciones del esquema de volúmenes finitos correspondientes a la malla  $\mathcal{T}_l$  y al tiempo  $t_n$  como  $\omega_{\mathcal{T}_l}^{k,n}$ .
4. **Estimación de los estadísticos:** Fijemos un entero positivo  $L < \infty$  que corresponderá al nivel más alto. Estimaremos la esperanza del campo aleatorio de la solución como:

$$E^L[\omega(\cdot, t^n)] := E_{M_0}[\omega_{\mathcal{T}_0}^n] + \sum_{l=1}^L E_{M_l}[\omega_{\mathcal{T}_l}^n - \omega_{\mathcal{T}_{l-1}}^n], \quad (2.4.1)$$

siendo  $E_{M_l}$  el estimador de Monte Carlo

$$E_{M_l}[\omega_{\mathcal{T}_l}^n] := \frac{1}{M_l} \sum_{k=1}^{M_l} \omega_{\mathcal{T}_l}^{k,n} \quad (2.4.2)$$

para el nivel  $l$ . Los momentos de orden superior  $\mathcal{M}^k[\omega(\cdot, t)^{(k)}]$  para  $k \geq 2$  se pueden estimar de la misma manera. Basándonos en el MC-FVM, podemos definir la

estimación del momento de orden  $k$  para el MLMC-FVM como

$$E^{L,(k)}[\omega_{\mathcal{T}_L}^n(\cdot)] := E_{M_0}[\omega_{\mathcal{T}_0}^{i,n}(\cdot)^{(k)}] + \sum_{l=1}^L E_{M_l}[\omega_{\mathcal{T}_l}^n(\cdot)^{(k)} - \omega_{\mathcal{T}_{l-1}}^n(\cdot)^{(k)}]. \quad (2.4.3)$$

Y de manera más general, dados los instantes de tiempo  $t = (t_1, \dots, t_k) \in [0, T]^k$ , con  $T < \infty$ , el momento de orden  $k$ ,  $\mathcal{M}^k[\omega](t)$  se define como

$$E^{L,(k)}[\omega_{\mathcal{T}_L}](t) := E_{M_0} \left[ \bigotimes_{r=1}^k \omega_{\mathcal{T}_0}(\cdot, t_r) \right] + \sum_{l=1}^L E_{M_l} \left[ \bigotimes_{r=1}^k \omega_{\mathcal{T}_l}(\cdot, t_r) - \bigotimes_{r=1}^k \omega_{\mathcal{T}_{l-1}}(\cdot, t_r) \right]. \quad (2.4.4)$$

Destacamos que el método MLMC-FVM es nuevamente un método no intrusivo, en el paso 3, se puede usar cualquier esquema de volumen finito estándar (alto orden). Además, el método MLMC-FVM es susceptible de una paralelización eficiente ya que los datos de diferentes resoluciones de malla y diferentes muestras solo interactúan en el paso 4.

Siguiendo el estudio riguroso sobre la estimación del error [89, 90], consideramos

$$\|E[\omega(\cdot, t^n)] - E_M[\omega_{\mathcal{T}}^n]\|_{L^2(\Sigma; L^1(D))} \leq C_1 \Delta x_L^s + C_2 \left\{ \sum_{l=0}^L M_l^{-1/2} \Delta x_l^s \right\} + C_3 M_0^{-1/2}. \quad (2.4.5)$$

Aquí nuevamente se hace referencia al ratio de convergencia  $s$  del esquema de volumen finito determinista y  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son constantes que dependen únicamente de los datos iniciales y los parámetros y términos fuente del sistema.

Del error descrito en (2.4.5), obtenemos el número de muestras necesarias para equilibrar el error estadístico con el error espacio-temporal dado en (2.4.1), tomando

$$M = \mathcal{O}(2^{2(L-l)} s). \quad (2.4.6)$$

Obsérvese que la elección de  $M_l$  implica que se requiere el mayor número de muestras de MC en el nivel de malla más grueso  $l = 0$ , mientras que solo se necesita un pequeño número fijo de muestras de MC en los niveles de discretización más finos (Véase figura 2.1).

El error asintótico frente a la estimación (computacional) del trabajo viene dado por (ver [90]):

$$\|E[\omega(\cdot, t^n)] - E^L[\omega_{\mathcal{T}}^n]\|_{L^2(\Sigma; L^1(D))} \leq \begin{cases} \text{Work}^{-s/d+1} \cdot \log(\text{Work}) & s < (d+1)/2, \\ \text{Work}^{-1/2} \cdot \log(\text{Work})^{3/2} & s = (d+1)/2, \\ \text{Work}^{-1/2} \cdot \log(\text{Work}) & s > (d+1)/2. \end{cases} \quad (2.4.7)$$

La estimación anterior muestra que MLMC-FV es más eficiente que MC-FV. Además, el MLMC-FV es (asintóticamente) de la misma complejidad que una resolución única del FVM determinista.

En la Figura 2.1 mostramos de modo gráfico la idea que hay subyacente en el algoritmo Monte Carlo multinivel. Se trata de considerar una jerarquía de mallas encajadas y de distribuir de forma adecuada los ensayos en cada una de ellas conforme a la estimación (2.4.6) para poder calcular los momentos haciendo uso de las fórmulas (2.4.1)-(2.4.4). Esta estrategia nos permite concentrar la mayor parte de los ensayos numéricos en las mallas más groseras, consiguiendo disminuir considerablemente el esfuerzo computacional.

Así, unas de nuestras principales aportaciones en esta tesis ha sido adaptar este algoritmo para el estudio de la cuantificación de la incertidumbre en problemas de generación y propagación de tsunamis generados por terremotos y avalanchas. Los principales resultados que hemos obtenido se recogen en los artículos [118] y [119]. Hasta donde conocemos es la primera vez que se utiliza este tipo de técnicas para abordar la cuantificación de la incertidumbre en problemas de flujos geofísicos sobre geometrías reales. Nuestro trabajo muestra que el método MLMC-FV proporciona resultados satisfactorios y que es una estrategia viable para abordar este tipo de problemas, donde incluso en número de campos aleatorios puede ser incluso bastante superior.

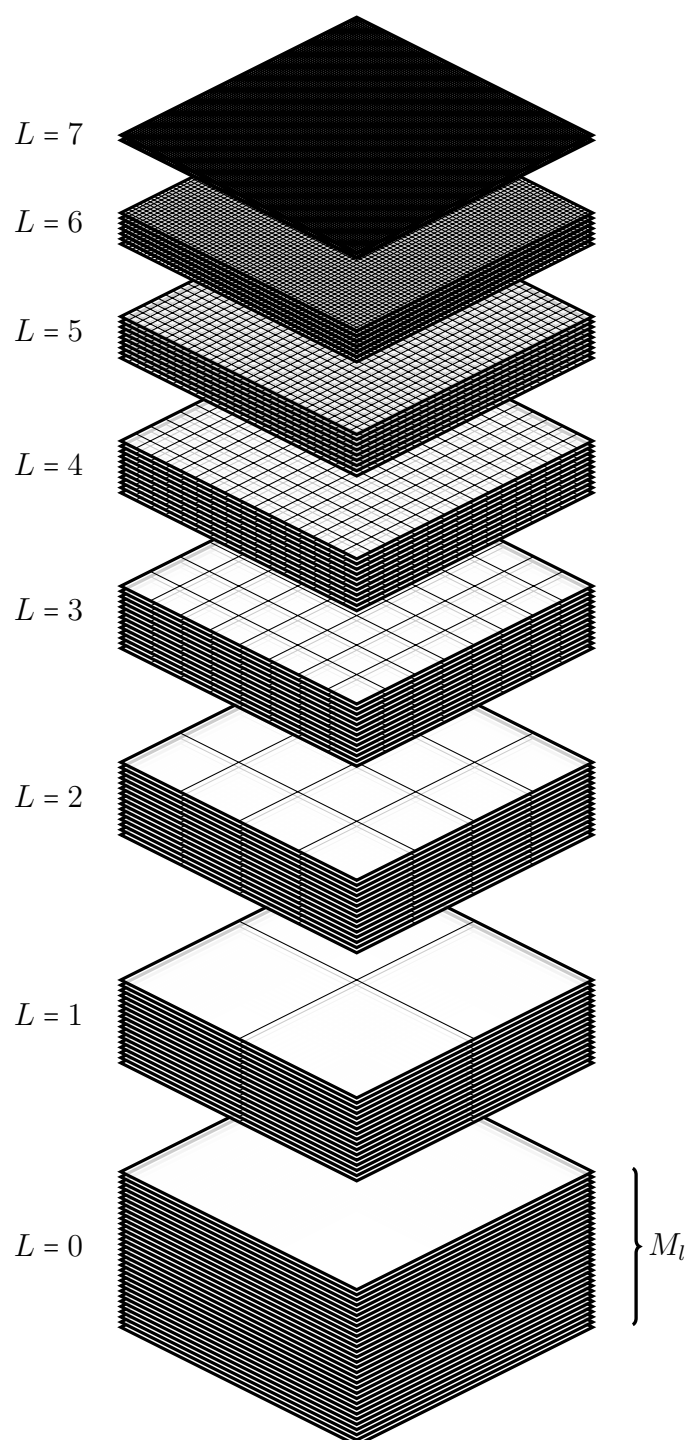


Figura 2.1: Mallas encajadas del método MLMC. Distribución de muestras.



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA



## Capítulo 3

# Algunos modelos de flujos geofísicos

En este capítulo presentamos los modelos que vamos a utilizar en esta memoria para la simulación de tsunamis generados por terremotos y avalanchas, así como el modelo de Ripa que aparece de forma habitual en el estudio de fluidos estratificados por la temperatura. Comenzaremos con uno de los modelos más usados en la propagación de tsunamis y su impacto en las zonas costeras: se trata del modelo de aguas someras o también conocido como ecuaciones de shallow-water. Para la estimación de la deformación causada por un terremoto se utiliza el modelo de Okada (véase [100]). En este trabajo vamos a suponer que el terremoto se produce en el instante inicial y que la deformación causada por el mismo se transmite en el instante inicial a la superficie del fluido, generándose el tsunami que modelamos con el sistema de aguas someras.

Como dijimos en la Introducción, la evolución de una avalancha y la generación del tsunami correspondiente es un problema difícil de modelar. Nosotros vamos a considerar uno de los modelos más utilizados hoy en día para la simulación de estos eventos. Concretamente se trata de una simplificación del modelo de tipo de Savage-Hutter de dos capas introducido por Fernández et al. en [50].

Por último, vamos a considerar el modelo de Ripa que es uno de los modelos más utilizados para comprender la estructura de fluidos estratificados en el océano o la atmósfera. A pesar de su aparente simplicidad este modelo presenta diferentes familias de soluciones estacionarias no triviales que son de interés en el estudio de estos fluidos. En este trabajo vamos a desarrollar un esquema de alto orden que las preserva y que en el momento de su publicación fue el primer trabajo donde se presentaba un esquema numérico con dichas propiedades.

### 3.1. Ecuaciones de aguas someras para el modelado de tsunamis

Consideremos aquí el sistema de ecuaciones de aguas someras o shallow-water 2D de una capa. Se trata de un sistema hiperbólico no lineal definido por:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x}(U) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(U) = S_1(U) \frac{\partial H}{\partial x} + S_2(U) \frac{\partial H}{\partial y} + S_F(U) \quad (3.1.1)$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix}, \quad F_1(U) = \begin{pmatrix} q_x \\ \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \\ \frac{q_x q_y}{h} \end{pmatrix}, \quad F_2(U) = \begin{pmatrix} q_y \\ \frac{q_x q_y}{h} \\ \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix},$$

$$S_1(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_2(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ gh \end{pmatrix},$$

$$S_F(U) = \begin{pmatrix} 0 & S_x(U) & S_y(U) \end{pmatrix}^T.$$

En el sistema anterior,  $h(\mathbf{x}, t)$ , denota la altura de la capa de agua en el punto  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^2$  en el instante  $t$ , donde  $D$  es la proyección horizontal del dominio 3D donde tiene lugar el terremoto y el consiguiente tsunami.  $H(\mathbf{x})$  es la profundidad del fondo en el punto  $\mathbf{x}$  medido desde un nivel de referencia. Introducimos también la función  $\eta(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) - H(\mathbf{x})$  que corresponde a la superficie libre del fluido (véase Figura 3.1). Denotamos por  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = (q_x(\mathbf{x}, t), q_y(\mathbf{x}, t))$  el caudal de agua en el punto  $\mathbf{x}$  en el instante  $t$ . El caudal está relacionado con la velocidad promediada en altura  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  mediante la expresión:  $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ .

El término  $S_F$  parametriza la fricción entre el fluido y el fondo no erosionable. Nosotros vamos a usar la ley de Manning,

$$\begin{cases} S_x(U) = -gh \frac{n^2}{h^{4/3}} u_x \|\mathbf{u}\| \\ S_y(U) = -gh \frac{n^2}{h^{4/3}} u_y \|\mathbf{u}\| \end{cases},$$

donde  $n > 0$  es el coeficiente de Manning.

Las soluciones estacionarias del sistema anterior correspondientes al agua en reposo son de la forma

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ h - H = \text{constante.} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

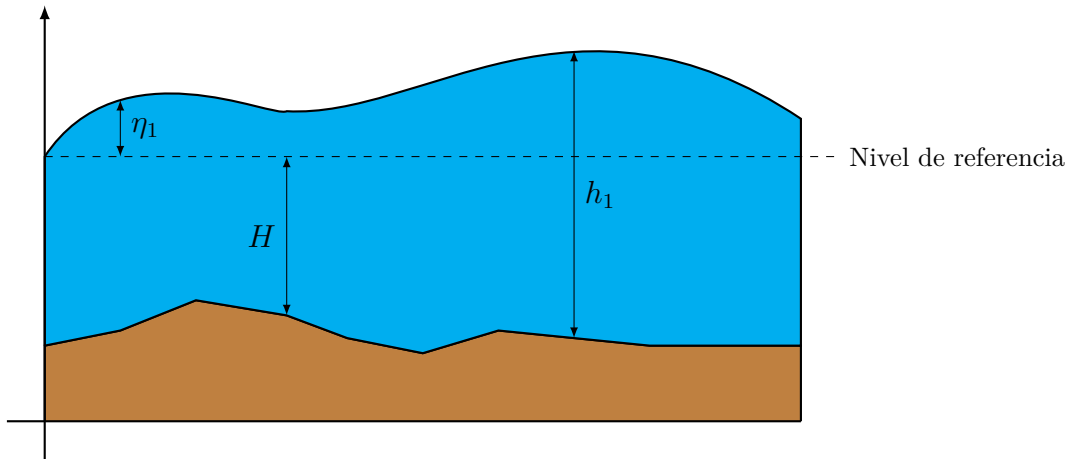


Figura 3.1: Esquema 1 capa. Términos y notación.

En la fase de generación de tsunamis se hace uso del modelo de deformación de Okada [100] para predecir la deformación inicial del fondo marino que se supone que se transmite de forma instantánea a la superficie del mar para generar la onda inicial del tsunami. El modelo de Okada asume que el terremoto se genera por la ruptura de un único plano de falla. Esta rotura de falla se describe por una serie de parámetros físicos que son:

- el largo y el ancho del plano de falla (generalmente medidos en m o km),
- la latitud y la longitud de algún punto en el plano de falla, generalmente el centroide o el centro de la parte superior (borde más superficial),
- la profundidad del punto específico en el fondo del mar,
- ángulo de deslizamiento (*strike angle*), es decir, la orientación del borde superior, medida en grados en el sentido de las agujas del reloj desde el norte y que toma valores entre 0 y 360. El plano de falla se inclina hacia abajo y hacia la derecha cuando se mueve a lo largo del borde superior en la dirección del deslizamiento,
- el ángulo de inmersión (*dip angle*) que es el ángulo en el que el plano se inclina hacia abajo desde el borde superior. Se trata de un ángulo positivo entre 0 y 90 grados,

- el ángulo de inclinación (*rake angle*), es decir, el ángulo en el plano de falla en el que se produce el deslizamiento, medido en grados en sentido antihorario desde la dirección del deslizamiento y que toma valores entre -180 y 180. Nótese que para un terremoto generado por fallas traslacionales (*strike-slip*), el ángulo de inclinación está cerca de 0 o de 180 grados. Para un terremoto por subducción, el ángulo de inclinación es generalmente más cercano a 90 grados, para una falla normal es aprox.  $-90^\circ$  y una inversa aprox.  $90^\circ$ .
- la distancia de deslizamiento (*slip distance*) es la distancia (generalmente en cm o m) del bloque suspendido que se mueve con relación al bloque en pie, en la dirección especificada por el ángulo de inclinación. El bloque suspendido es el que está encima del plano de falla de inmersión (o a la derecha si se mueve en la dirección de deslizamiento). Siempre es una cantidad positiva.

Este modelo proporciona una aproximación grosera de la deformación de la corteza terrestre, que no está compuesta por un material elástico isotrópico homogéneo, como se supone en este modelo. Sin embargo, es una aproximación razonable para el modelado de tsunamis, puesto que, en general no se conocen exactamente los parámetros de deslizamiento de falla en el momento en el que se produce el tsunami, incluso ni siquiera se conocen con exactitud tiempo después de haberse producido, de ahí el planteamiento de incorporar incertidumbre en los mismos.

A continuación, en la Figura 3.2 se muestra la relación de los parámetros para el modelo de desplazamiento de Okada.

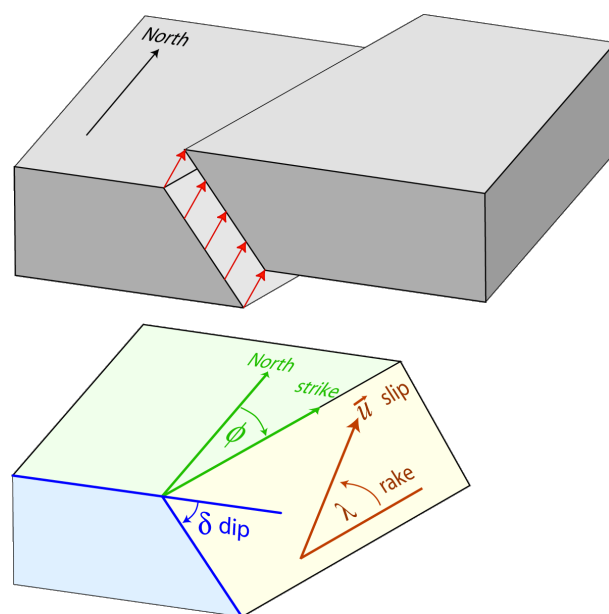


Figura 3.2: Definición de los ángulos *strike*, *dip* y *rake* para una modelo de rotura de falla.  
Fuente: [http://www.gps.alaska.edu/jeff/Classes/GEOS655/strike\\_dip\\_rake.gif](http://www.gps.alaska.edu/jeff/Classes/GEOS655/strike_dip_rake.gif)

### 3.2. Modelo bicapa de tipo Savage-Hutter para la simulación de avalanchas y la propagación de tsunamis

En este trabajo consideramos un modelo bidimensional de dos capas de tipo Savage-Hutter para la simulación de avalanchas y la generación y propagación del tsunami generado. Este sistema resulta de simplificar el modelo introducido en 2008 por Fernández et al. en [50], fijando para ello el sistema de referencia cartesiano usual, en vez del sistema de referencia local considerado en dicho trabajo. Aquí, consideramos su extensión natural a los dominios 2D, para poder simular problemas con batimetría real. El sistema resultante es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x}(U) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(U) + B_1(U) \frac{\partial U}{\partial x} + B_2(U) \frac{\partial U}{\partial y} = \\ S_1(U) \frac{\partial H}{\partial x} + S_2(U) \frac{\partial H}{\partial y} + S_F(U) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} h_1 \\ q_{1,x} \\ q_{1,y} \\ h_2 \\ q_{2,x} \\ q_{2,y} \end{pmatrix}, \quad F_1(U) = \begin{pmatrix} q_{1,x} \\ \frac{q_{1,x}^2}{h_1} + \frac{1}{2}gh_1^2 \\ \frac{q_{1,x}q_{1,y}}{h_1} \\ q_{2,x} \\ \frac{q_{2,x}^2}{h_2} + \frac{1}{2}gh_2^2 \\ \frac{q_{2,x}q_{2,y}}{h_2} \end{pmatrix}, \quad F_2(U) = \begin{pmatrix} q_{1,y} \\ \frac{q_{1,x}q_{1,y}}{h_1} \\ \frac{q_{1,y}^2}{h_1} + \frac{1}{2}gh_1^2 \\ q_{2,y} \\ \frac{q_{2,x}q_{2,y}}{h_2} \\ \frac{q_{2,y}^2}{h_2} + \frac{1}{2}gh_2^2 \end{pmatrix},$$

$$B_1(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & gh_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ rgh_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_1(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh_1 \\ 0 \\ 0 \\ gh_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_2(U) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & gh_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ rgh_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ gh_1 \\ 0 \\ 0 \\ gh_2 \end{pmatrix},$$

$$S_F(U) = \left( 0 \ S_{f_1}(U) \ S_{f_2}(U) \ 0 \ S_{f_3}(U) + \tau_x \ S_{f_4}(U) + \tau_y \right)^T.$$

En estas ecuaciones, el índice 1 hace referencia a la capa superior que está compuesta de un fluido homogéneo no viscoso con densidad  $\rho_1$ , y el índice 2 a una capa compuesta de un material granular parcialmente fluidizado de porosidad  $\psi_0$ . Si denotamos por  $\rho_s$  la densidad del material granular, entonces la densidad de la segunda capa viene dada por

$$\rho_2 = (1 - \psi_0)\rho_s + \psi_0\rho_1.$$

Supongamos además que ambas capas son inmiscibles.

El sistema (3.2.1) se obtiene mediante un proceso de integración vertical a partir de un sistema bicapa inmisible, donde cada una de las capas se suponen modeladas por las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles para un fluido homogéneo, donde se han despreciado los efectos viscosos horizontales, y se supone que la presión es hidrostática (véase [50]).

En el sistema anterior además,  $h_l(\mathbf{x}, t)$ ,  $l = 1, 2$  denota la altura de la capa de agua ( $l = 1$ ) y del material granular ( $l = 2$ ), respectivamente, en el punto  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^2$  en el instante  $t$ , siendo  $D$  la proyección horizontal del dominio 3D donde tiene lugar el deslizamiento y el tsunami.  $H(\mathbf{x})$  es la profundidad del fondo en el punto  $\mathbf{x}$  medido desde un nivel de referencia.

Introduzcamos las funciones

$$\eta_1(\mathbf{x}, t) = h_1(\mathbf{x}, t) + h_2(\mathbf{x}, t) - H(\mathbf{x}) \quad (3.2.2)$$

y

$$\eta_2(\mathbf{x}, t) = h_2(\mathbf{x}, t) - H(\mathbf{x}). \quad (3.2.3)$$

La primera de ellas representa la función que describe la superficie libre del fluido de la primera capa, y  $\eta_2(\mathbf{x}, t)$  describe la interfaz que separa a cada uno de los fluidos (véase Figura 3.3).

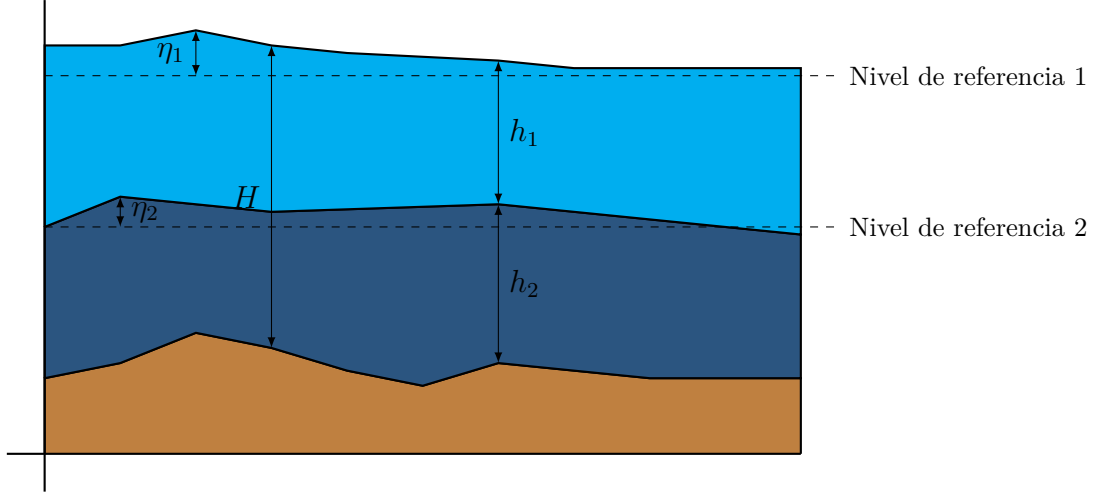


Figura 3.3: Esquema bicapa. Términos y notación.

Denotemos por  $q_l(\mathbf{x}, t) = (q_{l,x}(\mathbf{x}, t), q_{l,y}(\mathbf{x}, t))$  al caudal de la capa  $l$  en el punto  $\mathbf{x}$  en el tiempo  $t$ . El caudal está relacionado con la velocidad promediada en altura  $\mathbf{u}_l(\mathbf{x}, t)$  dada por la expresión:  $\mathbf{q}_l(\mathbf{x}, t) = h_l(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_l(\mathbf{x}, t)$ ,  $l = 1, 2$ . El parámetro  $r = \rho_1/\rho_2$  es el ratio de densidades constantes de las dos capas. ( $\rho_1 < \rho_2$ ).

Los términos  $S_{f_k}(U)$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , modelan los diferentes efectos de la fricción, y  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$  es el término de fricción de Coulomb.

Los términos  $S_{f_k}(U)$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , vienen dados por:

$$\begin{aligned} S_{f_1}(U) &= S_{c_x}(U) + S_{1_x}(U) & S_{f_3}(U) &= -r S_{c_x}(U) + S_{2_x}(U) \\ S_{f_2}(U) &= S_{c_y}(U) + S_{1_y}(U) & S_{f_4}(U) &= -r S_{c_y}(U) + S_{2_y}(U) \end{aligned}$$

$S_c(U) = (S_{c_x}(U), S_{c_y}(U))$  parametriza la fricción entre las dos capas y se define como:

$$\begin{cases} S_{c_x}(U) = m_f \frac{h_1 h_2}{h_2 + r h_1} (u_{2,x} - u_{1,x}) \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\| \\ S_{c_y}(U) = m_f \frac{h_1 h_2}{h_2 + r h_1} (u_{2,y} - u_{1,y}) \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\| \end{cases}$$

donde  $m_f$  es una constante positiva.

$S_l(U) = (S_{l_x}(U), S_{l_y}(U))$ ,  $l = 1, 2$  parametriza la fricción entre el fluido y el fondo no erosionable ( $l = 1$ ) y entre la capa de material granular y el fondo no erosionable ( $l = 2$ ), y

ambos están gobernados por la ley de Manning.

$$\begin{cases} S_{l_x}(U) = -gh_l \frac{n_l^2}{h_l^{4/3}} u_{l,x} \|\mathbf{u}_l\| \\ S_{l_y}(U) = -gh_l \frac{n_l^2}{h_l^{4/3}} u_{l,y} \|\mathbf{u}_l\| \end{cases} \quad l = 1, 2$$

donde  $n_l > 0$  ( $l = 1, 2$ ) es el coeficiente de Manning. Nótese que  $S_1(U)$  sólo se define donde  $h_2(x, y, t) = 0$ . En este caso,  $m_f = 0$  y  $n_2 = 0$ . Igualmente, si  $h_1(x, y, t) = 0$  entonces  $m_f = 0$  y  $n_1 = 0$ .

Además, el término de la fricción de Coulomb  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$  controla el mecanismo de parada del deslizamiento y se define así:

$$\text{Si } \|\boldsymbol{\tau}\| \geq \sigma^c \Rightarrow \begin{cases} \tau_x = -g(1-r)h_2 \frac{q_{2,x}}{\|\mathbf{q}_2\|} \tan(\alpha) \\ \tau_y = -g(1-r)h_2 \frac{q_{2,y}}{\|\mathbf{q}_2\|} \tan(\alpha) \end{cases}$$

$$\text{Si } \|\boldsymbol{\tau}\| < \sigma^c \Rightarrow q_{2,x} = 0, \quad q_{2,y} = 0,$$

donde  $\sigma^c = g(1-r)h_2 \tan(\alpha)$ , siendo  $\alpha$  el ángulo de fricción de Coulomb. Obsérvese que  $r$  se toma como 0 en  $\sigma^c$  y  $\boldsymbol{\tau}$ , si  $h_1(x, y, t) = 0$ , es decir, si se trata de un deslizamiento aéreo.

Nótese también que el modelo anterior se reduce al modelo habitual de una capa shallow-water si  $h_2 = 0$  y al modelo de Savage-Hutter si  $h_1 = 0$ .

Finalmente, algunas soluciones estacionarias de interés para el sistema anterior correspondientes al agua en reposo, es decir,  $\mathbf{u}_l = \mathbf{0}$ ,  $l = 1, 2$  son:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \\ h_1 + h_2 - H = \text{constante} \\ \partial_x(h_2 - H) < \tan(\delta_0), \\ \partial_y(h_2 - H) < \tan(\delta_0) \end{cases} \quad (3.2.4)$$

y, en particular,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \\ h_1 + h_2 - H = \text{constante} \\ h_2 - H = \text{constante} \end{cases} \quad (3.2.5)$$

son soluciones del sistema.



### 3.3. Modelo de Ripa

Consideremos ahora la modificación del sistema de ecuaciones de aguas someras en las que se tiene en cuenta las fluctuaciones de temperatura del agua. Este sistema fue inicialmente propuesto por Ripa en [113, 114] y para problemas unidimensionales se escribe como:

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{g}{2}h^2\theta\right) = -gh\theta\partial_x b, \\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(h\theta u) = 0, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

siendo  $h$  es la profundidad del agua;  $u$  es velocidad promediada en altura;  $b$  es la topografía del fondo, que se considera independiente del tiempo;  $g$  es el coeficiente de la gravedad;  $\theta$  denota el campo correspondiente a la temperatura. Denotaremos por  $q = hu$  el caudal del agua y por  $p = \frac{g}{2}h^2\theta$  la presión dependiente de la temperatura.

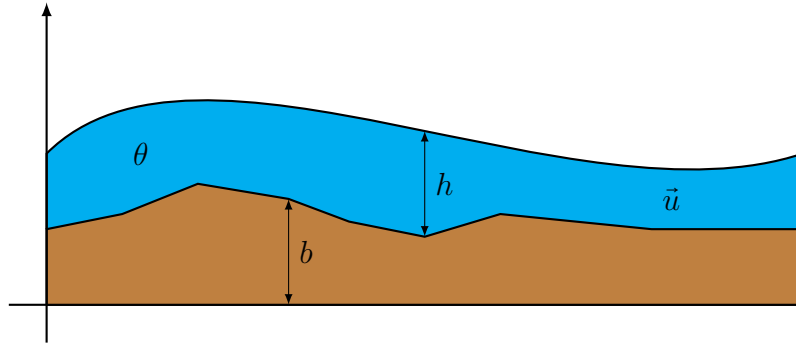


Figura 3.4: Modelo de Ripa 1 capa. Términos y notación.

Este sistema se introdujo en [113, 114, 43] para modelar las corrientes oceánicas y se lo conoce como el sistema de Ripa. La derivación del sistema se basa en considerar modelos oceánicos multicapa e integrar verticalmente los campos de densidad, gradiente de presión horizontal y velocidad en cada capa. El modelo incorpora los gradientes de temperatura horizontal, lo que da como resultado las variaciones en la densidad del fluido dentro de cada capa. Nosotros consideramos aquí el modelo más sencillo que es el compuesto por una única capa (Ver Figura 3.4).

A la hora de obtener esquemas numéricos para aproximar las soluciones débiles de (3.3.1), se presta especial atención a las soluciones estacionarias debido a su interés físico.

Para el modelo de Ripa (3.3.1), las soluciones estacionarias verifican:

$$\begin{cases} \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_x\left(\frac{u^2}{2} + g\theta(h+b)\right) + \frac{g}{2}h\partial_x\theta = 0, \\ \partial_x(h\theta u) = 0. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Entre los estados estacionarios del sistema (3.3.2), aquellos correspondientes a *agua en reposo* son de especial interés:

$$\theta = \text{constante}, \quad h + b = \text{constante}, \quad u = 0, \quad (3.3.3)$$

y las soluciones correspondientes a

$$b = \text{constante}, \quad p = \frac{g}{2}h^2\theta = \text{constante}, \quad u = 0. \quad (3.3.4)$$

En objetivo será obtener métodos numéricos que sean bien equilibrados para los estados (3.3.3) y (3.3.4) y que conserven la positividad de  $h$  y  $\theta$ , además de su extensión a alto orden.

## Parte II

### Resumen de las contribuciones



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

# Multi-level Monte Carlo finite volume method for shallow water equations with uncertain parameters applied to landslides-generated tsunamis

En este primer trabajo, aceptado para su publicación en *Applied Mathematical Modelling* en marzo de 2015, se estudia el modelado de tsunamis generados por avalanchas submarinas, y se realiza el análisis de incertidumbre para los parámetros: ratio de densidades, coeficiente de fricción entre capas y ángulo de fricción de Coulomb.

Consideramos una versión simplificada y unidimensional del modelo bicapa de tipo Savage-Hutter propuesto en [50] cuyas ecuaciones son

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial q_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_1^2}{h_1} + \frac{g}{2} h_1^2 \right) + gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} = gh_1 \frac{dH}{dx} + S_f + S_{b_1} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_2^2}{h_2} + \frac{g}{2} h_2^2 \right) + rgh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} = gh_2 \frac{dH}{dx} - rS_f + \tau. \end{array} \right. \quad (3.3.5)$$

y que ya hemos descrito con anterioridad en la Sección 3.2.

El sistema (3.3.5) puede escribirse de la siguiente forma:

$$w_t + F(w)_x + B(w)w_x = S(w)H_x + S_F(w), \quad (3.3.6)$$

En este artículo, presentamos un paradigma novedoso para la cuantificación de la incertidumbre (UQ) que combina el esquema numérico de volúmenes finitos IFCP con el que hemos discretizado el sistema hiperbólico no conservativo (3.3.5); junto con un novedoso algoritmo de muestreo estadístico Monte Carlo multinivel.

Este trabajo se articula como sigue: en primer lugar, presentamos el esquema que utilizaremos para discretizar el sistema (3.3.5) incluyendo los términos de fricción  $S_F(w)$ . Estos términos se discretizarán de forma semi-implícita como se describe en [15]. La discretización del término de fricción  $\tau$  se realizará siguiendo el procedimiento descrito en [50].

El esquema numérico consta de tres etapas, cada una de ellas referenciada por un superíndice fraccionario: en la primera etapa se realiza la aproximación del sistema hiperbólico no conservativo donde hemos eliminado todos los términos de fricción. La aproximación se realiza mediante el esquema IFCP y se propone una discretización de los términos de presión que es compatible con la discretización del término de fricción de Coulomb y que hace que el esquema aproxime correctamente las soluciones estacionarias (3.2.5). En la segunda etapa se realiza una discretización semi-implícita de los términos de fricción  $S_f$  y  $S_{b_1}$  y en el último se discretiza el término de Coulomb de forma semi-implícita siguiendo las ideas descritas en [15] para la simulación de avalanchas “aéreas” de materiales granulares.

El esquema resultante es exactamente bien equilibrado para las soluciones estacionarias (3.2.4). Además aproxima con precisión las soluciones estacionarias (3.2.5). Estas soluciones representan estados de equilibrio donde la presión se compensa con la fricción “estática”, dando lugar a los perfiles característicos de avalanchas de materiales granulares.

Se considera además la extensión a orden 2, usando reconstrucciones de tipo MUSCL, siguiendo el trabajo de Gallardo-Castro-Parés en [24].

A continuación, introducimos la incertidumbre en los parámetros arriba mencionados. Para ello y basándonos en la teoría de campos aleatorios descrita en la Sección 2.1, consideramos  $(\Sigma, F, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad completo y denotamos por  $w(t, x, \xi)$ ,  $\xi \in \Sigma$ , como la solución del sistema:

$$w_t(\xi) + F(w)_x + B(w, \xi)w_x = S(w)H_x + S_F(w, \xi). \quad (3.3.7)$$

Adaptamos y aplicamos el método MLMC al cálculo eficiente de los estadísticos de la solución. Este algoritmo se basa en el cálculo de la solución sobre mallas anidadas de diferentes resolución y la posterior estimación de cantidades estadísticas de interés, combinando los resultados de las diferentes resoluciones. El método es completamente

no intrusivo, fácil de paralelizar, rápido y preciso. En particular, podemos obtener varios órdenes de magnitud en eficiencia computacional si lo comparamos con el método estándar de Monte Carlo.

Finalmente, comparamos el método y los resultados en tres casos:

- Un deslizamiento submarino unidimensional sobre una topografía de fondo plano.
- Un experimento de laboratorio unidimensional realizado por Fritz et al. en [53] para reproducir el mega-tsunami de Lituya Bay de 1958.
- El mega-tsunami 2D de Lituya Bay.

En el primero de los casos tomamos los parámetros  $c_f = 0.0001$ ,  $r = 0.5$  y  $\delta_0 = 35^\circ$  con una variabilidad del 40 % sobre estos valores. Realizamos la cuantificación de la incertidumbre para el sistema Savage-Hutter de dos capas con la incertidumbre en los parámetros anteriores utilizando los esquemas IFCP de primer y segundo orden, tanto para MC como para MLMC.

En el caso MC-IFCP de orden 1, que notaremos por MC-IFCP1 usaremos  $N = 1024$  celdas de resolución y  $M = 1024$  ensayos (muestras). En el método MCML-IFCP1 usaremos  $L = 6$  niveles de resolución, desde  $N_0 = 32$  celdas hasta  $N_5 = 1024$  celdas, tomando  $M_5 = 16$  ensayos en la malla de resolución más fina. Para el esquema de segundo orden, usaremos  $M = 512$  muestras en una resolución de  $N = 1024$  celdas para MC-IFCP2, y para MLMC-IFCP2, al igual que para el primer orden,  $L = 6$  niveles de resolución desde  $N_0 = 32$  celdas hasta  $N_5 = 1024$  celdas, tomando  $M_5 = 16$  ensayos en la malla de resolución más fina.

La principal diferencia entre los métodos propuestos se obtiene cuando se compara la eficiencia computacional, medida en términos del error cometido con respecto al tiempo de ejecución. Los métodos MLMC son aproximadamente de 60 a 80 veces más rápidos que los métodos MC correspondientes, para el mismo nivel de error. Esta ganancia de casi dos órdenes de magnitud en eficiencia de los métodos de MLMC y que puede ser incluso mayor en problemas bidimensionales hacen que la técnica MLMC pueda utilizarse en simulaciones más realistas con un costo computacional aceptable.

Motivado por el hecho de que el método IFCP-MLMC de segundo orden fue la técnica computacional más eficiente en el primer experimento numérico (dos órdenes de magnitud más rápido que otros métodos para el mismo nivel de error en media y varianza), simulamos el modelo 1D a escala de laboratorio [53] utilizando el método IFCP-MLMC de segundo orden. La cantidad principal de interés para el experimento es la altura de alcance de la ola (*runups*) que queda registrada en la rampa. Los resultados de la simulación

coinciden de forma satisfactoria con los obtenidos con el experimento de laboratorio. En particular, la altura máxima y su tiempo de llegada coinciden casi exactamente con los datos experimentales y, sin duda, los datos experimentales para la máxima altura se encuentran dentro de la dispersión estadística de la solución. Además, la simulación también muestra un segundo *runup* provocado por la reflexión de la primera onda. Sin embargo, existen diferencias cuantitativas, particularmente con respecto al tiempo de llegada de la onda reflejada.

Finalmente, realizamos una simulación realista del mega-tsunami de Lituya Bay en 1958 del cual se tienen registros de *runups*. Dado que el dominio subyacente es bidimensional, consideramos la versión bidimensional del modelo Savage-Hutter de dos capas como se presenta en [50] y la aproximamos utilizando una extensión bidimensional del esquema IFCP. Para simplificar, usamos el esquema IFCP de primer orden. Para la realización de cálculos rápidos, este esquema se ha implementado en GPU usando CUDA siguiendo las ideas principales descritas en [4]. La implementación de MLMC-IFCP también se ha desarrollado en CUDA.

Los resultados numéricos indican claramente que el marco MLMC-IFCP puede aproximar las medidas estadísticas de interés, como las alturas máximas de alcance de las olas (*runups*), con bastante precisión y con un coste computacional razonable. Se comprueba también la coincidencia cualitativa y cuantitativa de los datos numéricos con los datos experimentales y observados. Además, las simulaciones ayudan a identificar la sensibilidad de los parámetros de incertidumbre incorporados.



# Uncertainty quantification in tsunami modeling using Multi-level Monte Carlo finite volume method

En este segundo trabajo, aceptado para su publicación en *Journal of Mathematics and Industry* en junio de 2016, es un trabajo que complementa al anterior y en él se lleva a cabo el estudio de cuantificación de la incertidumbre en los sistemas de ecuaciones que modelan los tsunamis generados por terremotos, además de los ya estudiados generados por avalanchas. Aquí además, la descripción de los modelos y de los esquemas numéricos se realiza directamente para problemas bidimensionales.

En primer lugar se describen de forma general tanto los sistemas de tipo Savage-Hutter bidimensionales bicapa (3.2.1) que modelan el comportamiento de tsunamis generados por avalanchas, descritos en la Sección 3.2, como los sistemas de ecuaciones de aguas someras bidimensionales una capa (3.1.1) que se suelen utilizar para la simulación de tsunamis. Junto con estas ecuaciones se usa el modelo de deformación de Okada (1985) para predecir la deformación inicial del fondo marino que se supone que transmite de forma instantánea la superficie del mar para generar la onda inicial del tsunami. El modelo de Okada asume que el terremoto se genera por la ruptura de un único plano de falla. Esta falla se describe por una serie de parámetros físicos que son: 1) buzamiento o inmersión (dip); 2) ángulo de deslizamiento (strike); 3) azimuth (rake); 4) anchura de la falla; 5) longitud de la falla; 6) profundidad del epicentro; y deslizamiento o dislocación (slip). Todos estos parámetros y sus magnitudes se detallan en el artículo.

A continuación se describe de forma general la construcción de un esquema de volúmenes finitos de alto orden en dominios bidimensionales. Esta formulación general es la que se usa para la discretización de los sistemas de aguas someras mono y bicapa, prestando especial atención al tratamiento de los términos de presión tal como se indicaban en el artículo anterior, así como el tratamiento semi-implícito de los términos de fricción.

El hecho de no conocer con exactitud los parámetros de la deformación hacen que el modelo de Okada sea susceptible de ser analizado por la teoría de cuantificación de la incertidumbre. En este trabajo se analizarán los efectos de incorporar incertidumbre en: la distancia de deslizamiento (*slip*), el ángulo de inmersión (*dip*), el ángulo de deslizamiento (*strike*) y el ángulo de inclinación (*rake*).

Con el fin de mostrar la eficiencia de la técnica MLMC para este tipo de problemas se lleva a cabo una simulación de un tsunami provocado por un terremoto en el Mar Mediterráneo. En dicha simulación, la incertidumbre en los valores de entrada para estos parámetros conduce a la incertidumbre en la solución del modelo de Okada y, por consiguiente, en el sistema de aguas someras (3.1.1). Aquí consideramos una discretización de segundo orden del sistema (3.1.1) sobre la esfera por medio de un esquema PVM path-conservative en combinación con un operador de reconstrucción tipo MUSCL. Este modelo se ha implementado en GPU con CUDA y con el método MLMC-FV. Se ha usado una cuadrícula rectangular de 30 segundos de arco para realizar la simulación 7019520 celdas y  $L = 4$  niveles de resolución con  $M_4 = 64$  muestras para el nivel más alto. Consideramos la siguiente variabilidad en los parámetros:  $slip = 10 \pm 2 \text{ m}$ ,  $dip = 35^\circ \pm 10^\circ$ ,  $strike = 310^\circ \pm 10^\circ$ ,  $rake = 90^\circ \pm 10^\circ$ . Además, tomamos la condición CFL como 0.5 y el coeficiente de fricción 0.03.

En este caso, vemos que la desviación estándar calculada a causa de los parámetros inciertos es inferior a 0.1m sobre la media en la propagación del tsunami. El máximo se encuentra cerca de las zonas costeras y en los frentes de las olas, como se esperaba.

Con respecto al tiempo de GPU, la simulación MLMC-FV completa toma aproximadamente 1.5 horas de tiempo de computación, es decir, menos de la mitad del tiempo real para proporcionar UQ en un problema tan grande. Este ejemplo muestra que el método MLMC-FV es un marco atractivo para la UQ en flujos geofísicos reales.

# A HLLC scheme for Ripa model

En este último trabajo, aceptado para su publicación en *Applied Mathematics and Computation* en enero de 2016, se considera la modificación del sistema Saint-Venant de ecuaciones de aguas someras, en las que se tienen en cuenta las fluctuaciones de temperatura del agua. En una dimensión espacial, el sistema toma la forma:

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x\left(hu^2 + \frac{g}{2}h^2\theta\right) = -gh\theta\partial_x b, \\ \partial_t(h\theta) + \partial_x(h\theta b) = 0, \end{cases} \quad (3.3.8)$$

donde  $h$  es la profundidad del agua;  $u$  es la velocidad horizontal promediada en profundidad;  $b$  es la topografía del fondo que se supone independiente del tiempo;  $g$  es la constante gravitacional;  $\theta$  denota el promedio de la temperatura en la capa ocupada por el fluido.

Denotaremos por  $q = hu$  la descarga y por  $p = \frac{g}{2}h^2\theta$  la presión dependiente de la temperatura.

Este sistema fue propuesto inicialmente en [43, 113, 114] para modelar las corrientes oceánicas y se lo conoce como sistema de Ripa. La derivación del sistema es similar a la que se realiza para la obtención del sistema de aguas someras, pero donde además se considera que los gradientes de temperatura horizontal influyen en la densidad del fluido y, por consiguiente, en los términos de presión.

Como ya comentamos en la sección 3.3, entre los estados estacionarios del sistema (3.3.8), aquellos correspondientes a *agua en reposo* son de especial interés:

$$\theta = \text{constante}, \quad h + b = \text{constante}, \quad u = 0, \quad (3.3.9)$$

y las soluciones correspondientes a

$$b = \text{constante}, \quad p = \frac{g}{2}h^2\theta = \text{constante}, \quad u = 0. \quad (3.3.10)$$

Este sistema se estudió en [40], donde se introdujo un esquema numérico bien equilibrado basado en el esquema *central-upwind*. En este artículo pretendemos derivar un nuevo esquema numérico para el sistema Ripa (3.3.8) basado en el marco de los resolvedores de Riemann simples para leyes de equilibrio introducidos en [14] y [103]. Usando este marco, presentamos un esquema de tipo HLLC, introducido en [131], siguiendo una técnica similar a la presentada en [34] para las corrientes turbidíticas.

Para la construcción de este esquema consideramos un resolvidor de Riemann simple de 4 ondas con 5 estados intermedios constantes que es camino-conservativo y que tiene las siguientes propiedades:

- es bien equilibrado para las soluciones (3.3.9) y (3.3.10),
- es positivo para  $h$  y  $\theta$ ,
- además satisface una desigualdad de entropía discreta en el caso de topografía  $b(x)$  constante. Postulamos además, que el resolvidor debería satisfacer una desigualdad similar si  $b(x)$  es continuo para  $\Delta x$  suficientemente pequeño.

Se propone además un esquema de alto orden (segundo y tercer orden) donde se usa un detector para poder discriminar las soluciones de la familias (3.3.9) y (3.3.10). En este punto, y para garantizar la positividad del esquema de alto orden, se sigue el procedimiento descrito en [123].

Por tanto, en este trabajo, hemos desarrollado un esquema HLLC de alto orden para el sistema Ripa que se deriva siguiendo una técnica general basada en resolvedores de Riemann simples camino-conservativos. El esquema resultante es robusto, fácil de implementar, bien equilibrado, conserva la positividad y es disipativo de entropía para el caso de fondo plano. Es la primera vez que se propone un esquema con estas propiedades para el sistema de Ripa.

## Referencia, resumen y DOI de las publicaciones

- **Multi-level Monte Carlo finite volume method for shallow water equations with uncertain parameters applied to landslides-generated tsunamis.**

Carlos Sánchez Linares, M. de la Asunción, M.J. Castro, S. Mishra, J. Sukys.  
 Applied Mathematical Modelling. Volume 39, Issues 23–24, December 2015,  
 DOI: 10.1016/j.apm.2015.03.011. Factor de impacto: 2.291 (13/101 Mathematics Interdisciplinary applications). CiteScore (Scopus): 2.67 (32/402 Applied Mathematics, 17/219 Modelling and Simulation).



Contents lists available at ScienceDirect

**Applied Mathematical Modelling**

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/apm](http://www.elsevier.com/locate/apm)



## Multi-level Monte Carlo finite volume method for shallow water equations with uncertain parameters applied to landslides-generated tsunamis

C. Sánchez-Linares<sup>a,\*</sup>, M. de la Asunción<sup>a</sup>, M.J. Castro<sup>a</sup>, S. Mishra<sup>b</sup>, J. Šukys<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Department of Mathematical Analysis, University of Málaga, Campus de Teatinos S/N, 29071 Málaga, Spain

<sup>b</sup> Department of Mathematics, ETH, Zurich, Switzerland

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 3 September 2014

Received in revised form 24 February 2015

Accepted 5 March 2015

Available online xxxx

#### Keywords:

Finite volume method

Shallow water equations

Uncertainty quantification

Landslides-generated tsunamis

### ABSTRACT

Two layer Savage–Hutter type shallow water PDEs model flows such as tsunamis generated by rockslides. On account of heterogeneities in the composition of the granular matter, these models contain uncertain parameters like the ratio of densities of layers, Coulomb and interlayer friction. These parameters are modeled statistically and quantifying the resulting solution uncertainty (UQ) is a crucial task in geophysics. We propose a novel paradigm for UQ that combines the recently developed IFCP spatial discretizations with the recently developed Multi-level Monte Carlo (MLMC) statistical sampling method and provides a fast, accurate and computationally efficient framework to compute statistical quantities of interest. Numerical experiments, including realistic simulations of the Lituya Bay mega tsunami, are presented to illustrate the robustness of the proposed UQ algorithm.

© 2015 Elsevier Inc. All rights reserved.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.03.011>

0307-904X/© 2015 Elsevier Inc. All rights reserved.

## ■ A HLLC scheme for Ripa model.

Carlos Sánchez Linares, T. Morales de Luna, M.J. Castro. Applied Mathematics and Computation 000 (2015) January 2016.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.05.137>. Factor de impacto:1.345 (54/254.Applied Mathematics). CiteScore (Scopus): 1.88 (66/398 Applied Mathematics, 18/112 Computational Mathematics).

Sánchez-Linares et al. *Journal of Mathematics in Industry* (2016) 6:5  
DOI 10.1186/s13362-016-0022-8

 **Journal of Mathematics in Industry**  
a SpringerOpen Journal

## RESEARCH

## Open Access



# Uncertainty quantification in tsunami modeling using multi-level Monte Carlo finite volume method

Carlos Sánchez-Linares<sup>1</sup>, Marc de la Asunción<sup>1</sup>, Manuel J Castro<sup>1\*</sup>, José M González-Vida<sup>2</sup>, Jorge Macías<sup>1</sup> and Siddhartha Mishra<sup>3</sup>

\*Correspondence:

castro@anamat.cle.uma.es

<sup>1</sup>Dpto. Análisis Matemático, Estadística e Investigación operativa y Matemática Aplicada, University of Málaga, Málaga, 29071, Spain  
Full list of author information is available at the end of the article

## Abstract

Shallow-water type models are commonly used in tsunami simulations. These models contain uncertain parameters like the ratio of densities of layers, friction coefficient, fault deformation, etc. These parameters are modeled statistically and quantifying the resulting solution uncertainty (UQ) is a crucial task in geophysics. We propose a paradigm for UQ that combines the recently developed path-conservative spatial discretizations efficiently implemented on cluster of GPUs, with the recently developed Multi-Level Monte Carlo (MLMC) statistical sampling method and provides a fast, accurate and computationally efficient framework to compute statistical quantities of interest. Numerical experiments, including realistic simulations in real bathymetries, are presented to illustrate the robustness of the proposed UQ algorithm.

**Keywords:** uncertainty quantification; multi-level Monte Carlo method; tsunami modeling



© 2016 Sánchez-Linares et al. This article is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons license, and indicate if changes were made.

■ **Uncertainty quantification in tsunami modeling using multi-level Monte Carlo finite volume method.**

Carlos Sánchez Linares, Marc de la Asunción, Manuel J. Castro Díaz, José M. González-Vida, Jorge Macías and Siddharta Mishra.

Journal of Mathematics and Industry (08 June 2016). CiteScore (Scopus): 1.15 (148/398 Applied Mathematics).

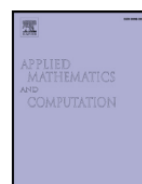
DOI: 10.1186/s13362-016-0022-8



Contents lists available at [ScienceDirect](http://www.sciencedirect.com)

## Applied Mathematics and Computation

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/amc](http://www.elsevier.com/locate/amc)



### A HLLC scheme for Ripa model

C. Sánchez-Linares<sup>a</sup>, T. Morales de Luna<sup>b,\*</sup>, M.J. Castro Díaz<sup>a</sup>

<sup>a</sup> Dpto. de Análisis Matemático, Facultad de Ciencias, Universidad de Málaga, Campus de Teatinos, s/n. 29071 Málaga, Spain

<sup>b</sup> Dpto. de Matemáticas, Universidad de Córdoba, Campus de Rabanales, 14071 Córdoba, Spain

#### ARTICLE INFO

Article history:  
Available online xxx

Keywords:  
Ripa system  
Finite volume schemes  
Path-conservative schemes  
HLLC

#### ABSTRACT

We consider the one-dimensional system of shallow-water equations with horizontal temperature gradients (the Ripa system). We derive a HLLC scheme for Ripa system which falls into the theory of path-conservative approximate Riemann solvers. The resulting scheme is robust, easy to implement, well-balanced, positivity preserving and entropy dissipative for the case of flat or continuous bottom.

© 2015 Elsevier Inc. All rights reserved.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.05.137>  
0096-3003/© 2015 Elsevier Inc. All rights reserved.



# Conclusiones

Esta sección resume las conclusiones más relevantes extraídas de este trabajo de investigación. También se sugieren algunas líneas futuras de trabajo.

Se ha realizado la extensión del esquema numérico IFCP, propuesto inicialmente para el sistema de aguas somera bicapa, a sistemas hiperbólicos de leyes de conservación con términos fuentes y productos no conservativos. Se han estudiado las propiedades de bien equilibrado y se ha demostrado la estabilidad  $L^\infty$  lineal del mismo.

Se ha llevado a cabo la aplicación de este esquema al modelo de Savage-Hutter bicapa para la simulación de avalanchas y propagación de tsunamis, donde se presta especial atención a la discretización de los términos de presión y del término fuente correspondiente a la fricción de Coulomb. Se estudian las propiedades de bien equilibrado del esquema resultante.

Se han implementado algoritmos de tipo MLMC que permiten incorporar incertidumbre en la simulación de tsunamis generados por avalanchas. Para ello se ha combinado la técnica MLMC con el método de volúmenes finitos de “camino conservativo” IFCP de primer y segundo orden. Se ha analizado la eficiencia del método comparando con el método MC estándar obteniéndose mejoras de hasta dos órdenes de magnitud respecto al esfuerzo computacional. Se han comparado las simulaciones con datos de laboratorio. También se ha simulado el tsunami ocurrido en la bahía de Lituya (Alaska) ocurrido en 1958, siendo los resultados obtenidos de gran utilidad para la validación de la metodología empleada. Se ha extendido esta técnica a otros problemas tales como la evaluación de la incertidumbre en tsunamis provocados por seísmos, aplicando la cuantificación de la incertidumbre en los parámetros del modelo de Okada, obteniéndose resultados satisfactorios.

Se ha trabajado en la aproximación de leyes de equilibrio hiperbólicas para la obtención de un esquema numérico que presente buenas propiedades relativas al bien equilibrado y positividad para el sistema de Ripa. Se presenta un resolutor de Riemann de tipo HLLC que preserva dos familias de soluciones estacionarias y que es positivo, así como su extensión a alto orden.



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

# Líneas futuras

## Líneas futuras

Se trabaja en la extensión de las técnicas propuestas a otros problemas de flujos geofísicos, como los correspondientes al arrastre de sedimentos mediante modelos de tipo aguas someras - Exner o de flujos hiperpicnales. También resulta de especial interés la reformulación del modelo de Ripa de una y dos capas sobre la esfera añadiendo términos fuentes que tengan en cuenta la radiación solar y otras fuentes externas. La discretización de este tipo de modelos es un reto debido a la presencia de diferentes términos fuentes y de los términos que aparecen como consecuencia de estar formulados sobre una variedad. Además se está trabajando en la implementación del algoritmo de optimización de Nelder-Mead (véase [96]) y variantes del mismo para el calibrado automático de los parámetros que aparecen en los diferentes modelos que hemos mencionado.



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA

# Bibliografía

- [1] ACUÑA M.A., AOKI T. Real-time tsunami simulation on a multi-node GPU cluster ACM/IEEE Conference on Supercomputing 2009 (SC 2009) [Poster], Portland (USA), 2009.
- [2] ALOUGES F, MERLET B. Approximate shock curves for non-conservative hyperbolic systems in one space dimension. *J. Hyperbolic Differential Equations*. 2004; 1(04):769-788.
- [3] ANCEY C.: Plasticity and geophysical flows: A review. *J. Non-Newt. FluidMech.* 142: 4–35, 2007
- [4] ASUNCIÓN M., MANTAS J.M., CASTRO M.J. Programming CUDA-based GPUs to simulate two-layer shallow water flows Lecture Notes in Computer Science. Euro-Par 201, 6272: 353–364, 2010.
- [5] ASUNCIÓN M., MANTAS J.M, CASTRO M.J. Simulation of one-layer shallow water systems on multicore and CUDA architectures *Journal of Supercomputing*, 58: 206–214, 2011.
- [6] ASUNCIÓN M., MANTAS J.M., CASTRO M.J., FERNÁNDEZ-NIETO E.D., An MPI-CUDA implementation of an improved Roe method for two-layer shallow water systems *Journal of Parallel and Distributed Computing, Special Issue on Accelerators for High-Performance Computing*, 72(9): 1065–1072, 2012.
- [7] ASUNCIÓN M., MANTAS J.M., CASTRO M.J., ORTEGA S., Scalable simulation of tsunamis generated by submarine landslides on GPU clusters, *Environmental Modelling & Software*, submitted.
- [8] AUDUSSE E., BOUCHUT F., BRISTEAU M.O. , KLEIN R., PERTHAME B.: A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows, *SIAM J. Sci. Comp.* **25**: 2050–2065, 2004.
- [9] BERMÚDEZ A., VÁZQUEZ M.E.: Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms, *Computers and Fluids*, **23**: 1049–1071, 1994.
- [10] BERTHON C., COQUEL F.: Nonlinear projection methods for multi-entropies Navier-Stokes systems, *Math. of Comp.* **76**: 1163–1194, 2007.
- [11] BERTHON C., COQUEL F., LEFLOCH P.G.: Why many theories of shock waves are necessary: Kinetic functions, equivalent equations, and fourth-order models, *J. Comput. Phys.* **227**: 4162–4189, 2008.

- [12] BIJL H., LUCOR D., MISHRA S., SCHWAB C., EDS. Uncertainty quantification in computational fluid dynamics, Springer lecture notes in CSE, LNCSE 92, 2014, Springer verlag.
- [13] BONA J.L., CHEN M. AND SAUT J.C. Boussinesq Equations and Other Systems for Small-Amplitude Long Waves in Nonlinear Dispersive Media. I: Derivation and Linear Theory *Journal of Nonlinear Science*, 2002,12-4,283-318
- [14] BOUCHUT F.: *Nonlinear Stability of Finite Volume Methods for Hyperbolic Conservation Laws and Well-Balanced Schemes for Sources*, Birkhäuser, 2004.
- [15] BOUCHUT F., MANGENEY A., PERTHAME B. , VILOTTE J.-P. : A new model of Saint Venant and Savage-Hutter type for gravity driven. *Journal of Geophysical research*, vol. 108, no. B11. 2003.
- [16] BRODTKORB A.R., SÆTRA M.L., ALTINAKAR M. Efficient shallow water simulations on GPUs: Implementation, visualization, verification, and validation, *Computers & Fluids*, 55:1–12, 2012.
- [17] CASTRO M.J., CHACÓN T., FERNÁNDEZ E.D., PARÉS C.: On well-balanced finite volume methods for non-conservative non-homogeneous hyperbolic systems, *SIAM J. Sci. Comput.* **29**: 1093–1126, 2007.
- [18] CASTRO M.J., CHACÓN T., FERNÁNDEZ E.D., GONZÁLEZ J.M., PARÉS C.: Well-balanced finite volume schemes for 2D non-homogeneous hyperbolic systems. Application to the dam-break of Aznalcóllar, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **197**: 3932–3950, 2008.
- [19] CASTRO M.J., E.D. FERNÁNDEZ, A. FERREIRO, J.A. GARCÍA, C. PARÉS: High order extensions of Roe schemes for two dimensional nonconservative hyperbolic systems, *J. Sci. Comput.* **39**: 67–114, 2009.
- [20] CASTRO M.J., FERREIRO A.M., GARCÍA J.A., GONZÁLEZ J.M., MACÍAS J., PARÉS C., VÁZQUEZ M.E.: On the numerical treatment of wet/dry fronts in shallow flows: applications to one-layer and two-layer systems. *Math. Comp. Model.*, 42 (3-4): 419-439, 2005.
- [21] CASTRO M.J., GARCÍA J.A., GONZÁLEZ J.M., MACÍAS J., PARÉS C., VÁZQUEZ M.E.: Numerical simulation of two layer shallow water flows through channels with irregular geometry, *J. Comput. Phys.* **195**: 202–235, 2004.
- [22] CASTRO M.J., GARCÍA J.A., GONZÁLEZ J.M., PARÉS C.: A parallel 2d finite volume scheme for solving systems of balance laws with nonconservative products: application to shallow flows, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* **196**: 2788–2815, 2006.
- [23] CASTRO M.J., FERNÁNDEZ E.D., GONZÁLEZ J.M., PARÉS C.: Numerical Treatment of the Loss of Hyperbolicity of the Two-Layer Shallow-Water System. *J. Sci. Comput.*, 48, 1-3 (July 2011), 16-40.
- [24] CASTRO M.J., GALLARDO J.M., PARÉS C.: High order finite volume schemes based on reconstruction of states for solving hyperbolic systems with nonconservative products. Applications to shallow water systems, *Math. Comp.* **75**: 1103–1134, 2006.

- [25] CASTRO M.J., GARCÍA J.A., GONZÁLEZ J.M., PARÉS C.: Solving shallow water systems in 2d domains using finite volume methods and multimedia SSE instructions, *J. Comput. App. Math.* **221**: 16–32, 2008.
- [26] CASTRO M.J., LEFLOCH P.G., MU NOZ M.L., PARÉS C.: Why many theories of shock waves are necessary. Convergence error in formally path-consistent schemes, *J. Comput. Phys.* **227**: 8107–8129, 2008.
- [27] CASTRO M.J., LÓPEZ J.A., PARÉS C.: Well-balanced high order extensions of Godunov method for linear balance laws, *SIAM J. Num. Anal.* **46**: 1012–1039, 2008.
- [28] CASTRO M.J., MACÍAS J., PARÉS C.: A Q-Scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1-D shallow water system, *Math. Mod. Num. Anal.* **35**: 107–127, 2001.
- [29] CASTRO M.J., PARDO A., PARÉS C.: Well-Balanced numerical schemes based on a generalized hydrostatic reconstruction technique, *Math. Mod. Meth. in Appl. Sci.* **17**: 2055 - 2113, 2007.
- [30] CASTRO M.J., PARDO A., PARÉS C., TORO E.: Well-balanced high-order MUSTA schemes for non-conservative hyperbolic systems, in *Numerical Mathematics and Advanced Applications. Proceedings of ENUMATH 2007*: 249–256, Springer, 2008.
- [31] CASTRO M.J., PARDO A., PARÉS C., TORO E.: On some fast well-balanced first order solvers for nonconservative systems, *Math. Comp.*, DOI: 10.1090/S0025-5718-09-02317-5.
- [32] CASTRO M.J., ORTEGA S., ASUNCIÓN M., MANTAS J.M., GALLARDO J.M.: GPU computing for shallow water flow simulation based on finite volume schemes *Comptes Rendus Mécanique*, 339: 165–184, 2011.
- [33] CASTRO M.J., FERNÁNDEZ E.D.: A class of computationally fast first order finite volume solvers: PVM methods. *SIAM J. Sci. Comput.* 2012; 34(4), A2173-A2196.
- [34] CASTRO M.J. , FERNÁNDEZ E.D., MORALES DE LUNA T., NARBONA REINA G., PARÉS C.: A HLLC scheme for nonconservative hyperbolic problems. Application to turbidity currents with sediment transport. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis.* 2012; 47(1):1-32.
- [35] CASTRO M.J., FJORDHOLM U.S., MISHRA S., PARÉS C.: Entropy conservative and entropy stable schemes for non-conservative hyperbolic systems *SIAM Journal on Numerical, Analysis.* 2013; 51(3):1371-1391.
- [36] CASTRO, M.J., GALLARDO, J.M. AND MARQUINA, A.: A Class of Incomplete Riemann Solvers Based on Uniform Rational Approximations to the Absolute Value Function. *Journal of Scientific Computing.* 60. 363-389. 10.1007/s10915-013-9800-2, 2014
- [37] CASTRO M.J., MORALES DE LUNA T., PARÉS C.: Well-Balanced Schemes and Path-Conservative Numerical Methods *Handbook of Numerical Analysis*, Volume 18, 2017, Pages 131-175, ISSN 1570-8659
- [38] CHACÓN T., DOMÍNGUEZ A., FERNÁNDEZ E.D.: A family of stable numerical solvers for shallow water equations with source terms, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **192**: 203–225, 2003.

- [39] CHACÓN T., DOMÍNGUEZ A., FERNÁNDEZ E.D.: Asymptotically balanced schemes for nonhomogeneous hyperbolic systems—application to the shallow water equations, *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, **338**: 85–90, 2004.
- [40] CHERTOCK, A., KARNI, S., KURGANOV, A. Interface tracking method for compressible multifluids. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 42(6), 991-1019. doi:10.1051/m2an:2008036
- [41] CHE S., BOYER M., MENG J., TARJAN D., SHEAFFER J.W., SKADRON K. A performance study of general-purpose applications on graphics processors using CUDA *Journal of Parallel and Distributed Computing*, 68:1370–1380, 2008.
- [42] CHEN Q.Y., GOTTLIEB D., HESTHAVEN J.S. Uncertainty analysis for the steady-state flows in a dual throat nozzle *J. of Computat. Phys.* 204: 378–398, 2005.
- [43] DELLAR, PAUL J. Common Hamiltonian structure of the shallow water equations with horizontal temperature gradients and magnetic fields *Physics of Fluids (1994-present)*, 2003, 15, 2, 292–297
- [44] DAL MASO G., LEFLOCH P.G., MURAT F.: Definition and weak stability of nonconservative products, *J. Math. Pures Appl.* **74**: 483–548, 1995.
- [45] DAVIS SF. Simplified Second-Order Godunov-Type Methods. *SIAM J. Sci. Stat Comput.* 1988; 9:445–473.
- [46] DEGOND P. , PEYRARD P-F., RUSSO G. AND VILLEDIEU PH. : *Polynomial upwind schemes for hyperbolic systems*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I, **328** (1999), pp. 479–483 .
- [47] DE VUYST F.: *Schémas nonconservatifs et schémas cinétiques pour la simulation numérique d'écoulements hypersoniques non visqueux en déséquilibre thermochimique*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, Paris, France, 1994.
- [48] DUTYKH D., DIAS F.: Dissipative Boussinesq equations *Comptes Rendus Mécanique*, Volume 335, Issues 9–10, 559-583 2007.
- [49] FANG J, VARBANESCU A.L., SIPS H. A comprehensive performance comparison of CUDA and OpenCL 40th International Conference on Parallel Processing (ICPP 2011): 216–225, 2011.
- [50] FERNÁNDEZ E.D., BOUCHUT F., BRESCH D. , CASTRO-DÍAZ M.J., AND MANGENEY A.: A new Savage-Hutter type models for submarine avalanches and generated tsunami. *J. Comput. Phys.*, 227:7720–7754, 2008.
- [51] FERNÁNDEZ-NIETO E.D., CASTRO DÍAZ M.J., AND PARÉS C.: On an Intermediate Field Capturing Riemann Solver Based on a Parabolic Viscosity Matrix for the Two-Layer Shallow Water System. *J. Sci. Comput.* 48, 1-3 (July 2011).
- [52] FJORDHOLM U.S., KÄPELLI R., MISHRA S. AND TADMOR E.: Construction of approximate entropy measure valued solutions for hyperbolic systems of conservation laws. *arXiv:1402.0909v1*, 2014
- [53] FRITZ, H.M., HAGER, W.H., MINOR, H.-E.: Lituya bay case: Rockslide impact and wave run-up. *Science of Tsunami Hazards* 19(1):3-22, 2001.



- [54] FRITZ, H.M.: Initial phase of landslide generated impulse waves. *VAW-Mitteilung 178, Minor, H.-E., ed.* ETH Zurich, Zurich, 2002.
- [55] FRITZ, H.M., HAGER, W.H., MINOR, H.-E.: Landslide generated impulse waves. *Experiments in Fluids*, 35:505-532, 2003.
- [56] FRITZ, H.M., MOSER, P.: Pneumatic landslide generator. *International Journal of Fluid Power*, 4(1):49-57, 2003.
- [57] FRITZ, H.M., HAGER, W.H., MINOR, H.-E.: Near field characteristics of landslide generated impulse waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE 130(6):287-302, 2004.
- [58] FRITZ H.M., MOHAMMED F., YOO J., Lituya Bay landslide impact generated mega-tsunami 50th anniversary Pure Appl. Geophys., 166(1-2):153-175, 2009.
- [59] GILES M. Improved multilevel Monte Carlo convergence using the Milstein scheme. PREPRINT NA-06/22. OXFORD COMPUTING LAB., OXFORD, UK; 2006.
- [60] GILES M. Multilevel Monte Carlo path simulation. *Oper Res.* 2008;56:607-17
- [61] GOSSE L.: A well-balanced flux-vector splitting scheme designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms, *Comput. Math. Appl.* **39**: 135-159, 2000.
- [62] GOSSE L.: A well-balanced scheme using nonconservative products designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **11**: 339-365, 2001.
- [63] GOSSE L.: Localization effects and measure source terms in numerical schemes for balance laws, *Math. Comp.* **71**: 553-582, 2002.
- [64] GOTTLIEB S., SHU C.-W.: Total variation diminishing Runge-Kutta schemes. *Math. Comp.* **67** , 73-85, 1998.
- [65] GREENBERG J.M. , LEROUX A.Y.: A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations, *SIAM J. Numer. Anal.* **33**: 1-16, 1996.
- [66] GREENBERG J.M., LEROUX A.Y., BARAILLE R., NOUSSAIR A.: Analysis and approximation of conservation laws with source terms, *SIAM J. Numer. Anal.* **34**: 1980-2007, 1997.
- [67] GRILLI ST., HARRIS JC., BAKHSH TST., MASTERLARK TL., KYRIAKOPOULOS C., KIRBY JT., SHI FY., Numerical simulation of the 2011 Tohoku tsunami based on a new transient FEM co-seismic source: Comparison to far and near-field observations. *Pure and Applied Geophysics*, 170(6-8): 1333-1359, 2013.
- [68] HARTEN A., ENGQUIST B., OSHER S., CHAKRAVARTHY S.: Uniformly High Order Accurate Essentially Non Oscillatory Schemes III, *J. Comput. Phys.* **71**: 231-303, 1987.
- [69] HARTEN A., HYMAN J.M.: Self-adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.* **50**: 235-269, 1983.

- [70] HARTEN A., LAX P.D., VAN LEER B.: On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws, *SIAM Rev.* **25**: 35–61, 1983.
- [71] HEINRICH, P.: Nonlinear water waves generated by submarine and aerial landslides. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 1992. ASCE 118(3):249–266.
- [72] HEINRICH, S. Multilevel Monte Carlo methods. Large-scale scientific computing. Third international conference LSSC 2001, Sozopol, Bulgaria. Lecture Notes in Computer Science, Vol 2170, Springer Verlag, 58–67, 2001.
- [73] HELLER V., HAGER W.H., MINOR H.-E.: Scale effects in subaerial landslide generated impulse waves. *Experiments in Fluids*, Volume 44, No. 5, 691–703, 2007.
- [74] HELLER V.: Landslide generated impulse waves: Prediction of near field characteristics by Valentin Heller. *Thesis (Doctoral) ETH/VAW* 2007.
- [75] HELLER V., HAGER W.H.: Wave types of landslide generated impulse waves. *Ocean Engineering*, Volume 38, No. 4. (17 March 2011), pp. 630–640.
- [76] HOU T.Y., LEFLOCH P.G.: Why nonconservative schemes converge to wrong solutions: error analysis, *Math. Comp.* **62**, 497–530, 1994.
- [77] IVERSON R.M., DENLINGER R.P.: Flow of variability fluidized granular masses across three-dimensional terrain 1: Coulomb mixture theory. *J. Geophys. Res.* **106**, 537–552, 2001.
- [78] JACOBSEN D.A., SENOCAK I., Multi-level parallelism for incompressible flow computations on GPU clusters, *Parallel Computing*, **39**: 1–20, 2013
- [79] JIANG G, SHU CW: Efficient implementation of weighted ENO schemes. *J. Comput. Phys.* 1996;126: 202–228.
- [80] KHRONOS OPENCL WORKING GROUP, The OpenCL Specification, <http://www.khronos.org/opencl>, Accessed April 2015.
- [81] LEFLOCH P.G.: Shock waves for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form, *Institute for Math. and its Appl., Minneapolis*, Preprint 593, 1989.
- [82] LEFLOCH P.G.: Graph solutions of nonlinear hyperbolic systems, *Jour. Hyper. Differ. Equa.* **2**, 643–689, 2004.
- [83] LEFLOCH P.G., T.-P. LIU: Existence theory for nonlinear hyperbolic systems in nonconservative form, *Forum Math.* **5**: 261–280, 1993.
- [84] LEVEQUE Numerical methods for conservation laws. *Lectures in Mathematics-ETH Zürich*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin (1992).
- [85] LEVEQUE R.J.: Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: The quasi-steady wave-propagation algorithm, *J. Comput. Phys.* **146**: 346–365, 1998.
- [86] LIU XD, OSHER S, CHAN T.: Weighted essentially nonoscillatory schemes. *J. Comput. Phys.* 1994;115:200–212.

- [87] LUKACOVA-MEDVIDOVA M., NOELLE S., KRAFT M.: Well-balanced finite volume evolution Galerkin methods for the shallow water equations, *J. Comput. Phys.* **221**: 122–147, 2007.
- [88] MARQUINA A.: Local piecewise hyperbolic reconstructions for nonlinear scalar conservation laws.. *SIAM J. Sci. Comp.* **15**: 892-915, 1994.
- [89] MISHRA, S. AND SCHWAB, C. Sparse tensor multi-level Monte Carlo Finite Volume Methods for hyperbolic conservation laws with random initial data. *Math. Comp.* January, 2011.
- [90] MISHRA, S., SCHWAB, C. AND SUKYS, J. Multi-level Monte Carlo finite volume methods for nonlinear systems of conservation laws in multi-dimension. *J. Comput. Physics.*, 231:3365-3388. April, 2012.
- [91] MISHRA, S., SCHWAB, C. AND SUKYS, J. Multilevel Monte Carlo Finite Volume Methods for Shallow Water Equations with Uncertain Topography in Multi-dimensions. *SIAM J. Scientific Computing.*, 34, 6. 2012
- [92] MISHRA S., BIJL .H, LUCOR D., SCHWAB C.: Uncertainty quantification in computational fluid dynamics. *Heidelberg: Springer; 2014. (Lecture notes in computational science and engineering; vol. 92).*
- [93] Message Passing Interface Forum: A Message Passing Interface Standard University of Tennessee
- [94] MU NOZ M.L., PARÉS C.: Godunov method for nonconservative hyperbolic systems, *Math. Model. Numer. Anal.* **41**: 169–185, 2007.
- [95] MATSUMOTO M., NISHIMURA T.: Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Trans Model Comput Simul.* 1998;8(1):3-30.
- [96] NELDER J.A. AND MEAD R.: A simplex method for function minimization *Comput. J.*, 7 (1965), pp. 308–313.
- [97] NOELLE S., PANKRATZ N., PUPPO G., NATVIG J.R.: Well-balanced finite volume schemes of arbitrary order of accuracy for shallow water flows. *J. Comput. Phys.* **213**, 474–499, 2006.
- [98] NOELLE S., XING Y., SHU C.-W.: High Order Well-balanced Finite Volume WENO Schemes for Shallow Water Equation with Moving Water. *J. Comput. Phys.* **226**: 29–59, 2007.
- [99] NVIDIA, NVIDIA Developer Zone, <http://developer.nvidia.com/category/zone/cuda-zone>, Accessed April 2015.
- [100] OKADA, Y. Surface deformation due to shear and tensile faults in a half space *Bulletin of the Seismological Society of America*, 75: 1135–1154, 1985.
- [101] OWENS J.D., HOUSTON M., LUEBKE D., GREEN S., STONE J.E., PHILLIPS J.C. GPU computing *Proceedings of the IEEE*, 96:879–899, 2008.

- [102] PARÉS C., CASTRO M.J.: On the well-balance property of Roe's method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to Shallow-Water Systems, *Math. Model. Numer. Anal.* **38**: 821–852, 2004.
- [103] PARÉS C.: Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework, *SIAM J. Num. Anal.* **44**: 300–321, 2006.
- [104] PARÉS C.: Path-conservative numerical methods for nonconservative hyperbolic systems *Quaderni di matematica*, **24**: 67–122, 2009.
- [105] PARÉS C., MUÑOZ RUÍZ ML.: On some difficulties of the numerical approximation of nonconservative hyperbolic systems *Bol Soc Esp Mat Apl.* 2009;47:23-52.
- [106] PELANTI M., BOUCHUT F., MANGENEY A.: A Roe-Type Scheme For Two-Phase Shallow Granular Flows Over Variable Topography, *Math. Model. Numer. Anal.* **42**, 851–885, 2008.
- [107] PERTHAME B., SIMEONI C.: A kinetic scheme for the Saint–Venant system with a source term, *Calcolo* **38**: 201–231, 2001.
- [108] PERTHAME B., SIMEONI C.: Convergence of the upwind interface source method for hyperbolic conservation laws, in *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*, Thou and Tadmor, ed., Springer, Berlin, 2003.
- [109] PITMAN E.B., LE L.: A two-fluid model for avalanche and debris flows. *Phil. Trans. R. Soc. A* 363, pp. 1573–1601, 2005.
- [110] POETTE G., DESPRÉS B., LUCOR D.: Uncertainty quantification for systems of conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 228: 2443–2467, 2009.
- [111] PRATO G.D., ZABCZYK J.: *Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge University Press, 2008*
- [112] RHEBERGEN S., BOKHOVE O., VAN DER VEGT J.J.W.: Discontinuous Galerkin finite element methods for hyperbolic nonconservative partial differential equations, *J. Comput. Phys.* **227**: 1887–1922, 2008.
- [113] RIPA, P.: Conservation laws for primitive equations models with inhomogeneous layers. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 1993, 70, 1-4, 85-111
- [114] RIPA, P.: On improving a one-layer ocean model with thermodynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, 1995, 303, 169–201
- [115] ROE P.L.: Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *J. Comp. Phys.*, 43 (1981), 357–372.
- [116] ROE P.L.: Upwinding difference schemes for hyperbolic conservation laws with source terms. In Carasso, Raviart, and Serre, editors, *Proceedings of the Conference on Hyperbolic Problems*, 41-51. Springer, 1986.
- [117] RUSSO G., KHE A.: High order well balanced schemes for systems of balance laws, presented in *HYP2008: 12th International Conference on Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*, CSCAMM, University of Maryland, June 9–13, 2008.



- [118] SÁNCHEZ-LINARES C., DE LA ASUNCIÓN M., CASTRO M.J, MISHRA S., ŠUKYS J.: Multi-level Monte Carlo finite volume method for shallow water equations with uncertain parameters applied to landslides-generated tsunamis *Applied Mathematical Modelling*, Volume 39, Issues 23–24, 2015
- [119] SÁNCHEZ-LINARES, C. , DE LA ASUNCIÓN, M. , CASTRO, M.J. , GONZÁLEZ-VIDA, J. M. , MACÍAS, J. , MISHRA, S.: Uncertainty quantification in tsunami modeling using multi-level Monte Carlo finite volume method *J.Math.Industry* (2016) 6: 5. <https://doi.org/10.1186/s13362-016-0022-8>
- [120] SÁNCHEZ-LINARES C., MORALES DE LUNA T., CASTRO DÍAZ M.J.: A HLLC scheme for Ripa model *Applied Mathematics and Computation*, Volume 272, Part 2, 2016
- [121] SAVAGE S.B. AND HUTTER K.: The motion of a finite mass of granular material down a rough incline. *J. Fluid Mech.*, 199:177–215, 1989.
- [122] SCHIJF J.B., SCHONFELD J.C.: Theoretical considerations on the motion of salt and fresh water, *Proceedings of the Minn. Int. Hydraulics Conv.*, Joint meeting IAHR and Hyd. Div. ASCE., September, 1953, pp. 321-333.
- [123] SHU C.-W.: *Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws*, ICASE Report 97-65, 1997.
- [124] SHU C.-W., OSHER S.: Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. *J. Comput. Phys.* **77**: 439–471, 1988.
- [125] SHU C.-W., OSHER S.: Efficient Implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes II, *J. Comput. Phys.* **83**: 32–78, 1989.
- [126] TANG H., TANG T., XU K.: A gas-kinetic scheme for shallow-water equations with source terms. *Angew. Math. Phys.* **55**: 365–382, 2004.
- [127] TADMOR E. The numerical viscosity of entropy stable schemes for systems of conservation laws. *I. Mathematics of Computation.* 1987; 49:91-103.
- [128] TORO E.F.: *Riemann Solvers and numerical methods for fluid dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.
- [129] TORO E.F., BILLETT S.J. Centred TVD schemes for hyperbolic conservation laws. *IMA Journal of Numerical Analysis.* 2000; 20:47-79.
- [130] TORO E.F., TITAREV V.A.: MUSTA fluxes for systems of conservation laws, *J. Comput. Phys.* **216**: 403–429, 2006.
- [131] TORO E.F., SPRUCE M., AND SPEARES W.: Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. *Shock Waves*, 4(1):25–34, July 1994.
- [132] TOUMI I.: A weak formulation of Roe approximate Riemann solver, *J. Comp. Phys.* **102**: 360–373, 1992.
- [133] TRYOEN J., LE MAITRE O., NDJINGA M., ERN A. Intrusive projection methods with upwinding for uncertain non-linear hyperbolic systems, *Journal of Computational Physics*, 229(18): 6485–6511, 2010.

- [134] VAN LEER, B.: Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *J. Comput. Phys.* 1979;32: 101-136.
- [135] VIÑAS M., LOBEIRAS J., FRAGUELA B.B., ARENAZ M., AMOR M., GARCÍA J.A., CASTRO M.J., DOALLO R. A multi-GPU shallow-water simulation with transport of contaminants *Concurrency and Computation: Practice and Experience*, 25: 1153–1169, 2012.
- [136] A.I. VOLPERT: The space BV and quasilinear equations, *Math. USSR Sbornik*, **73**: 225–267, 1967.
- [137] XIU D., HESTHAVEN J. S. High-order collocation methods for differential equations with random inputs. *SIAM J. Sci. Comput.*, 27: 1118–1139, 2005.
- [138] XIAN W., TAKAYUKI A., Multi-GPU performance of incompressible flow computation by Lattice Boltzmann method on GPU cluster, *Parallel Computing*, 9: 521–535, 2011.
- [139] YAMAZAKI Y, CHEUNG KF, PAWLAK G, LAY T Surges along the Honolulu coast from the 2011 Tohoku tsunami. *Geophysical Research Letter*, 39(9), L09604, 2012.
- [140] ZABARAS N., MA X. An adaptive hierarchical sparse grid collocation algorithm for the solution of stochastic differential equations. *J. Comp. Phys.*, 228: 3084–3113, 2009.
- [141] ZWEIFEL A., HAGER W.H., MINOR H.-E.: Plane impulse waves in reservoirs. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*. ASCE 132(5):358-368., 2006.



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA



UNIVERSIDAD  
DE MÁLAGA